

Течения в пограничных слоях вдоль поверхностей с малыми неровностями

Р. К. Гайдуков^{1,2}, В. Г. Данилов²

¹Московский Технический Университет Связи и Информатики

²НИУ «Высшая Школа Экономики»

Мы рассматриваем течение несжимаемой вязкой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса \mathbf{Re} в различных задачах:

1) вдоль пластины с малыми периодическими неровностями на поверхности

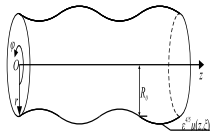
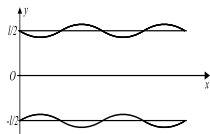
$$S = \{y_{\Gamma} = \varepsilon^{4/3} \mu_1(x, x/\varepsilon)\};$$

2) в канале ширины l с течением Пуазейля внутри (исключая пограничный слой) и малыми периодическими неровностями на стенках $S = \{y_{\Gamma} = \varepsilon^{4/5} \mu_{\pm}(x, x/\varepsilon^{2/5}) \pm l/2\};$

3) в аксиально-симметричной трубе радиуса R_0 с течением Пуазейля внутри (исключая пограничный слой) и малыми периодическими неровностями на стенке

$$S = \{y_{\Gamma} = \varepsilon^{4/5} \mu_2(x, x/\varepsilon^{2/5}) + R_0\}.$$

Здесь ε — малый параметр, $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$, а все функции $\mu_i(x, \xi)$ — 2π -периодические по ξ , гладкие и имеющие нулевое среднее.



Все перечисленные задачи описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности

$$\langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \quad \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0. \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (u, v)$ — вектор скорости, p — это давление, а ε — малый параметр, определенный ранее.

Граничные условия при обтекании пластины имеют вид

$$\mathbf{U}|_S = \mathbf{0}, \quad \mathbf{U}|_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow (1, 0)^T, \quad \mathbf{U}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow (1, 0)^T,$$

$$\partial_y u|_{y=0, x < 0} = 0, \quad v|_{y=0, x < 0} = 0.$$

Граничные условия в задачах течения в канале и трубе имеют вид:

$$\mathbf{U}|_S = \mathbf{0} \quad (2)$$

Определение 1.

Для любой 2π -периодической гладкой функции $g(x, \xi)$, определенной на $\mathbb{R}^n \times [0, 2\pi]$, мы определяем

- (i) среднее значение по формуле $\bar{g}(x) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, \xi) d\xi$,
- (ii) осциллирующую часть: $\tilde{g}(x, \xi) \triangleq g(x, \xi) - \bar{g}(x)$.

Определение 2.

Для любой 2π -периодической гладкой функции $\tilde{g}(x, \xi)$, определённой на $\mathbb{R}^n \times [0, 2\pi]$ и такой, что $\bar{g}(x, \xi) = 0$, мы

определяем функцию $G(x, \xi) = \int_0^\xi \tilde{g}(x, \xi)$ так чтобы $\bar{G}(x, \xi) = 0$.

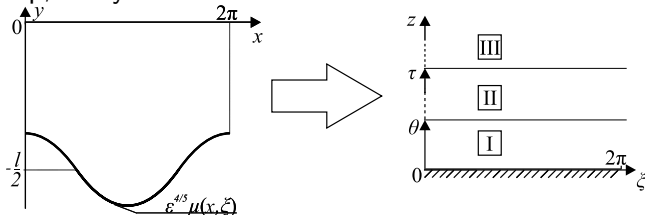
Двухпалубная структура пограничного слоя

Решение всех приведенных задач имеет одну и ту же структуру при различных масштабах неровности, а именно — двухпалубную структуру пограничного слоя:

- тонкий погранслой около стенки (I), $\theta = z/\varepsilon^{\sigma_1}$, $\xi = x/\varepsilon^{\sigma_3}$,
 - толстый погранслой (II), $\tau = z/\varepsilon^{\sigma_2}$, $\xi = x/\varepsilon^{\sigma_3}$,
- и внешнюю область (III), $\xi = x/\varepsilon^{\sigma_3}$ с невозмущенным течением, где $z = y - y_\Gamma$ — новая вертикальная переменная, в которой криволинейная граница $y = y_\Gamma$ становится плоской

Случай пластины	Случай канала (трубы)
$\sigma_1 = 4/3$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$	$\sigma_1 = 4/5$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 2/5$

Например, в случае канала:



Отметим также, что в случае канала, пограничный слой у одной стенки не взаимодействует с погранслоем у другой стенки.

В силу этого, мы рассматриваем пограничный слой только у нижней стенки (у верхней стенки все будет аналогично).

В случае аксиально-симметричной трубы пограничный слой не зависит от угла φ .

Асимптотическое решение задачи (1),(2)

Теорема 1. Асимптотическое решение задачи (1),(2) имеет вид

$$u = u_0 + \varepsilon^{\alpha_1} (u_1^I(x, \xi, \theta) + u_1^{II}(x, \xi, \tau) + u_1^{III}(x, \xi, z)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha_2}),$$

$$v = \varepsilon^{\beta_1} (v_2^I(x, \xi, \theta) + \tilde{v}_2^{II}(x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\beta_2}),$$

$$p = p_0 + \varepsilon^{\gamma_1} \tilde{p}_2^{II}(x, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{\gamma_2}),$$

где функции с верхним индексом I определены в тонком погранслое, с II — в толстом, а с III — во внешней области.

Случай пластины	Случай канала (трубы)
$\alpha_1 = 1/3, \alpha_2 = \beta_1 = \gamma_1 = 2/3,$ $\beta_2 = 1, \gamma_2 = 1;$ $u_0 = 1 + f'(\tau/\sqrt{x});$ $u_1^{II} = \mu f''(\tau/\sqrt{x})/\sqrt{x};$ $u_1^{III} = 0, p_0 = \text{const};$	$\alpha_1 = 4/5, \alpha_2 = \beta_1 = 6/5,$ $\beta_2 = \gamma_1 = 8/5, \gamma_2 = 12/5;$ $u_0 = \omega(z);$ $u_1^{II} = 0;$ $u_1^{III} = \mu\omega'(z), p_0 = \hat{p}(x).$

где $f(\eta)$ — функция Блазиуса, а ω_0 — скорость течения

Пуазейля, $\hat{p} = \bar{p} + \varepsilon^2 \bar{\bar{p}}x$, $\bar{p} = \text{const}$, $\bar{\bar{p}} = \text{const}$.

Функции u_1^{II} и u_1^{III} обусловлены лишь выпрямлением границы, т.е. течение в погранслое не вносит вклад в течение вне него.

Асимптотическое решение задачи (1),(2)

Теорема 1: течение в тонком погранслое

Функции u_1^* и v_2^* , описывающие течение в тонком пограничном слое,

$$u_1^* = u_1^I + (\theta + \mu)Q, \quad v_2^* = v_2^I + \tilde{v}_2^{II}(x, \xi, 0),$$

где $Q = f''(0)/\sqrt{x}$ в случае пластины, и $Q = \omega'(0)$ в случае канала (трубы), являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \\ u_1^0 \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \right) + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial p_2}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_1^*|_{\theta=0} = v_2^*|_{\theta=0} = 0, \quad \bar{v}_2^*|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad u_1^*|_{\xi} = u_1^*|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^*|_{\xi} = v_2^*|_{\xi+2\pi},$$
$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow Q, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} Q.$$

Асимптотическое решение задачи (1),(2)

Теорема 1: течение в толстом погранслое

Уравнения на функцию \tilde{v}_2^{II} , описывающую осцилляции в толстом погранслое, различны для случаев канала (трубы) и пластины.

В случае канала — функция \tilde{v}_2^{II} удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = 0,$$

а в случае пластины функция \tilde{v}_2^{II} удовлетворяет уравнению типа Рэлея

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \int_0^\xi \tilde{v}_2^{\text{II}} + f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta \tilde{v}_2^{\text{II}} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0.$$

Граничные условия одинаковы для обоих случаев:

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_\xi = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}.$$

Асимптотическое решение задачи (1),(2)

Теорема 1: течение в толстом погранслое

Давление в толстом погранслое \tilde{p}_2^{II} определяется следующими формулами: для случая пластины:

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = f'(\tau/\sqrt{x}) \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{f''(\tau/\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

для случая канала:

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = w'(0) \left[\tau \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \right].$$

В качестве иллюстрации приведем результаты численного моделирование течения в тонком погранслое для случая канала.

Задачу (3) мы решаем методом установления; для численного решения мы использовали явную разностную схему.

В качестве функции, описывающей неровность мы выбрали $\mu(\xi) = A \cos \xi$, $A = \text{const}$.

Для определения стационарности получаемого решения мы определили функцию $\text{eps}(t)$ в следующем виде:

$$\text{eps}(t_k) = \max \left\{ \max_{i,j} |(u_1^0)^{k+1}_{ij} - (u_1^0)^k_{ij}|, \max_{i,j} |(v_2^0)^{k+1}_{ij} - (v_2^0)^k_{ij}| \right\}.$$

Мы считаем, что полученное решение стационарно, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t^* > 0 : \|\text{eps}(t)\| < \epsilon \quad \forall t > t^*.$$

Моделирование течения в тонком погранслое

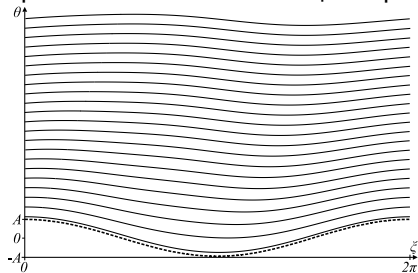
Основные результаты моделирования

- Мы получили, что характер течения зависит от амплитуды A неровности, а именно существует некоторое значение A^* , такое, что при $A < A^*$ наблюдается ламинарное течение, а при $A > A^*$ течение становится вихревым.
- Также мы исследовали влияние ширины канала на характер течения: при увеличении ширины канала l критическая амплитуда A^* уменьшается.

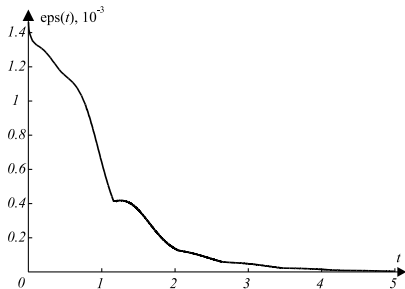
Моделирование течения в тонком погранслое

Ламинарное течение, амплитуда неровности $A = 0.3$, ширина канала $l = 1$

Для амплитуды $A = 0.3$ функции μ и ширины канала $l = 1$ мы наблюдали ламинарное течение, которое с некоторого момента времени становится стационарным.



а) Установившееся течение,
 $t > 0$;

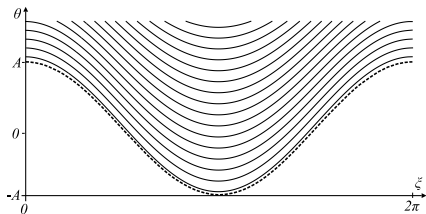


б) График функции $\text{eps}(t)$.

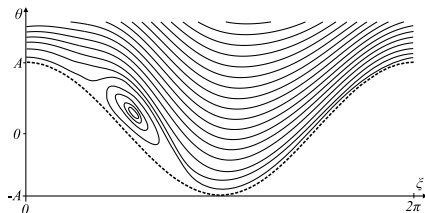
Моделирование течения в тонком погранслое

Вихревое течение, амплитуда неровности $A = 1$, ширина канала $l = 1$

Для амплитуды $A = 1$ и ширины канала $l = 1$ в канале образуется вихрь, который исчезает спустя некоторое время, и начиная с некоторого момента времени течение становится ламинарным.



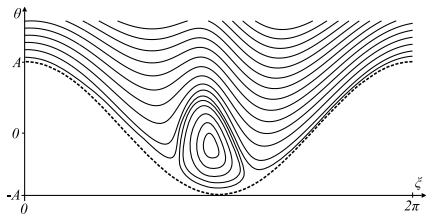
а) Начальное условие, $t = 0$;



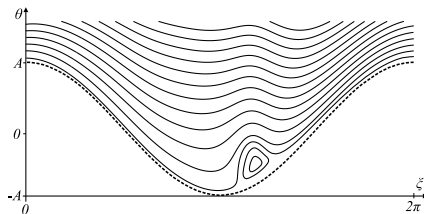
б) Образование вихря,
 $t = t_1 > 0$;

Моделирование течения в тонком погранслое

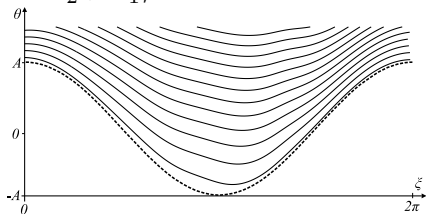
Вихревое течение, амплитуда неровности $A = 1$, ширина канала $l = 1$



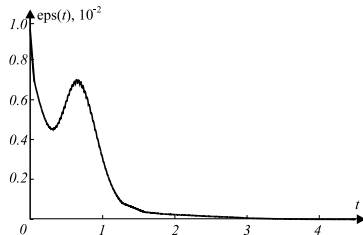
в) Перемещение вихря,
 $t = t_2 > t_1$;



г) Гибель вихря, $t = t_3 > t_2$;



д) Установившееся течение,
 $t = t_4 > t_3$;

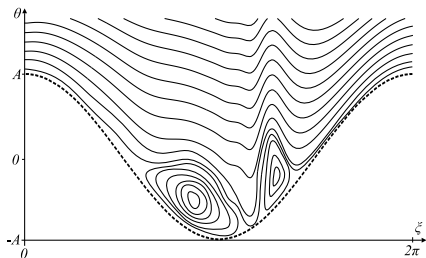


е) График функции $\text{eps}(t)$.

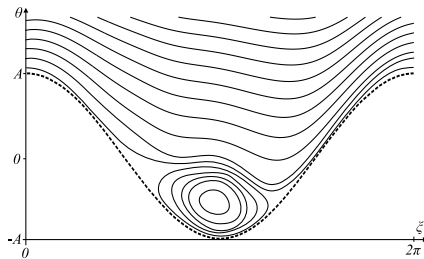
Для амплитуды $A > 1$ и ширины канала $l = 1$ сначала наблюдается формирование вихря (как для случая $A = 1$), но после его гибели возникает новый вихрь, и этот процесс продолжается некоторое время, после которого течение становится стационарным, но не ламинарным как в случае $A = 1$, т.е. стационарный вихрь в ямке, но неизвестно что произойдет с ним на «больших временах».

Моделирование течения в тонком погранслое

Вихревое течение, амплитуда неровности $A = 1.5$, ширина канала $l = 1$



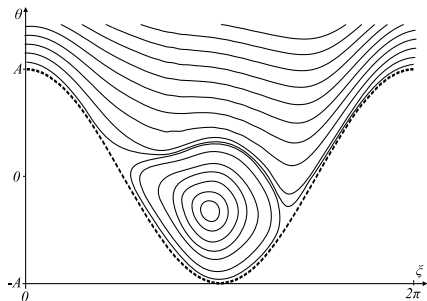
а) Два вихря, $t = t_1 > 0$;



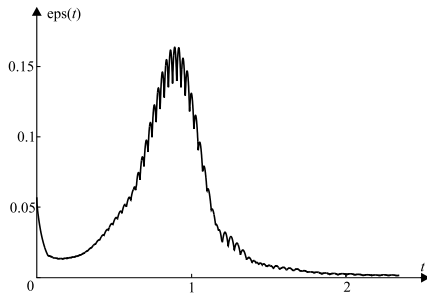
б) Установившееся течение,
 $t = t_2 > t_1$.

Моделирование течения в тонком погранслое

Вихревое течение, амплитуда неровности $A = 1.9$, ширина канала $l = 1$



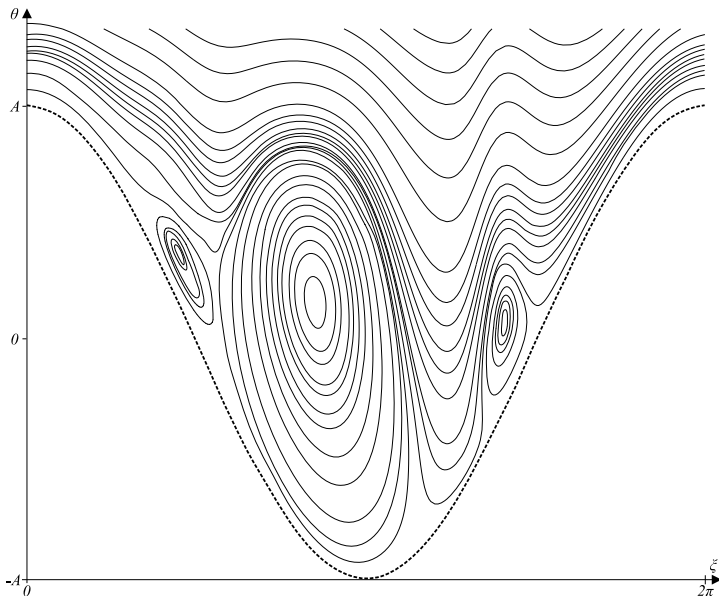
а) Установившееся течение,
 $t > 0$;



б) График функции $\text{eps}(t)$.

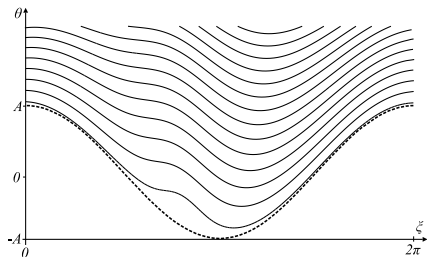
Моделирование течения в тонком погранслое

Вихревое течение, амплитуда неровности $A = 2.3$, ширина канала $l = 1$, $t > 0$

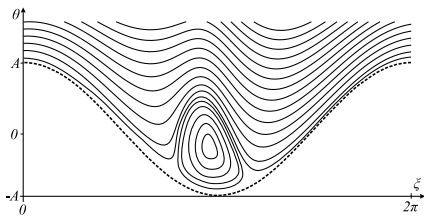


Моделирование течения в тонком погранслое

Влияние ширины канала, амплитуда неровности $A = 1$, $t = t^* > 0$



а) Ламинарное течение,
 $l = 0.33$



б) Вихревое течение, $l = 1$

Следовательно, можно сделать вывод:

Критическая амплитуда A^* уменьшается при увеличении ширины канала l .

Асимптотическое решение задачи (1),(2) в толстом погранслое

Уравнения на функции \tilde{v}_2^{II} , описывающие осцилляции в толстом слое различны для случаев канала (трубы) и пластины.

В случае канала функция \tilde{v}_2^{II} удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = 0,$$

а в случае пластины функция \tilde{v}_2^{II} удовлетворяет уравнению типа Рэлея

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \int_{\xi}^{\xi} \tilde{v}_2^{\text{II}} + f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta \tilde{v}_2^{\text{II}} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0.$$

Граничные условия одинаковы для обоих случаев:

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}.$$

- Интерес представляет случай пластины, а именно – уравнение типа Рэлея

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \int_{\xi}^{\xi} \tilde{v}_2^{II} + f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta \tilde{v}_2^{II} - \tilde{v}_2^{II} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (4)$$
$$\tilde{v}_2^{II} \Big|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^{II} = 0, \quad \tilde{v}_2^{II} \Big|_{\xi} = \tilde{v}_2^{II} \Big|_{\xi+2\pi},$$

где функция \tilde{v}_2^* описывает течение в тонком погранслое, а функция $f(\gamma)$ – это функция Блазиуса.

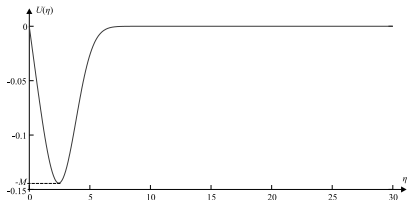
- Нами получены условия существования и единственности стационарного решения уравнения (4).
- Отметим, что решение уравнения в тонком погранслое зависит от t , а решение уравнения (4) от времени $t' = \varepsilon^{-1/3}$. В силу этого возникает вопрос об устойчивости решения уравнения (4) на больших временах.

Стационарное решение уравнения типа Релея

Стационарное уравнение, отвечающее уравнению (4) имеет вид

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{x} \tilde{v}_2^{\text{II}} U(\eta) = 0, \quad (5)$$

Потенциал $U(\eta) = f'''(\eta)/f'(\eta)$ представляет собой ямку глубины M и обладает следующими свойствами $U(0) = 0$, $U|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, а $M \approx 0.1442$.



Можно показать (разложив функцию \tilde{v}_2^{II} в ряд Фурье), что разрешимость этой задачи эквивалентна существованию собственных чисел оператора типа Шредингера на полуоси

$$\begin{cases} -\psi_k'' + U\psi_k = \lambda_k \psi_k, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\lambda_k = -xk^2$, x — параметр (расстояние от края пластины).

Если $x > M$, то легко доказать, что собственных чисел не существует, и исходная стационарная задача (5) имеет единственное решение

Следовательно, имеет единственное решение задача типа Рэлея (4), и можно доказать устойчивость.

Подробнее в:

DANILOV, V. G., GAYDUKOV, R. K. (2013) Oscillations in classical boundary layer for flow with double-deck boundary layers structure. *Proceedings of International Conference DAYS on DIFFRACTION 2013* 28–31.

Если $0 < x \leq M$, то возможно существование собственных значений у задачи (6). В случае существования с.з., у задачи (5) может возникать нетривиальное решение, которое приводит к неединственности всей задачи, и по-видимому, к неустойчивости.

Известно, что если собственные значения задачи (6) существуют, то они отрицательные ($\lambda_k < 0$), а также справедлива оценка для количества собственных значений N_λ :

$$N_\lambda \leq \int_0^\infty \eta |U(\eta)| d\eta \approx 1.23.$$

Это означает, что в такой потенциальной яме возможно существования лишь одного собственного значения.

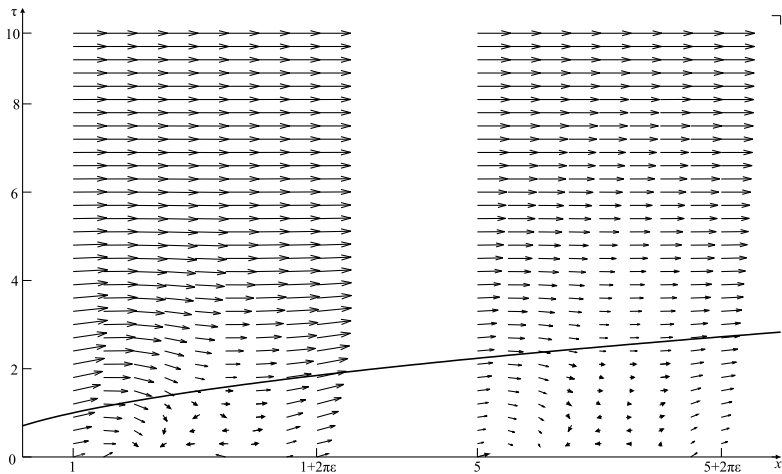
Нам удалось доказать, что собственного значения не существует.





Справедлива следующая теорема.

Теорема. Решение уравнения (4) существует и единственно при любых $x > 0$.

Моделирование течения в толстом погранслое

Течение, вычисленное при $x = 1$ и $x = 5$.



-  DANILOV, V.G., MASLOV, V.P., VOLOSOV, K.A. (1995) *Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes*. Kluwer Academic Publishers.
-  DANILOV, V.G. & MAKAROVA, M.V. (1994) Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities. *Russian J. of Math. Phys.* **2**, No. 1.
-  DANILOV, V. G., GAYDUKOV, R. K. (2013) Oscillations in classical boundary layer for flow with double-deck boundary layers structure. *Proceedings of International Conference DAYS on DIFFRACTION 2013* 28–31.
-  DANILOV, V. G., GAYDUKOV, R. K. Vortexes in the Prandtl boundary layer induced by irregularities on a plate // *Russian Journal of Mathematical Physics* (in print)

Спасибо за внимание!