Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сверхпроводящие кубиты для информационных технологий

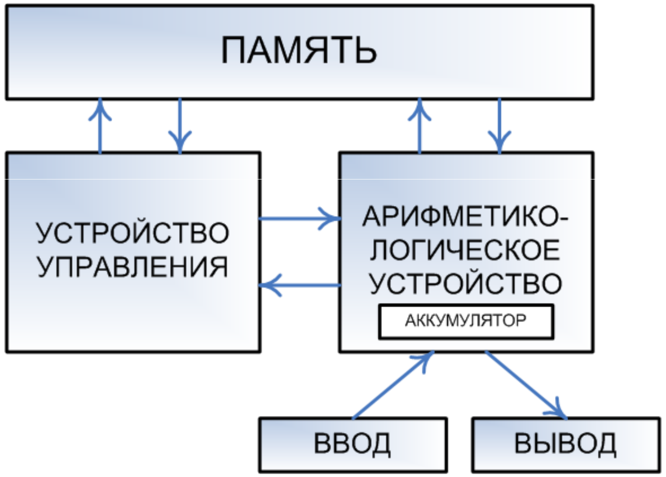
А.М.Сатанин

ННГУ им. Н.И.Лобачевского (Национальный исследовательский университет),
Лаборатория «Теория наноструктур» НИФТИ, Н.Новгород, Россия

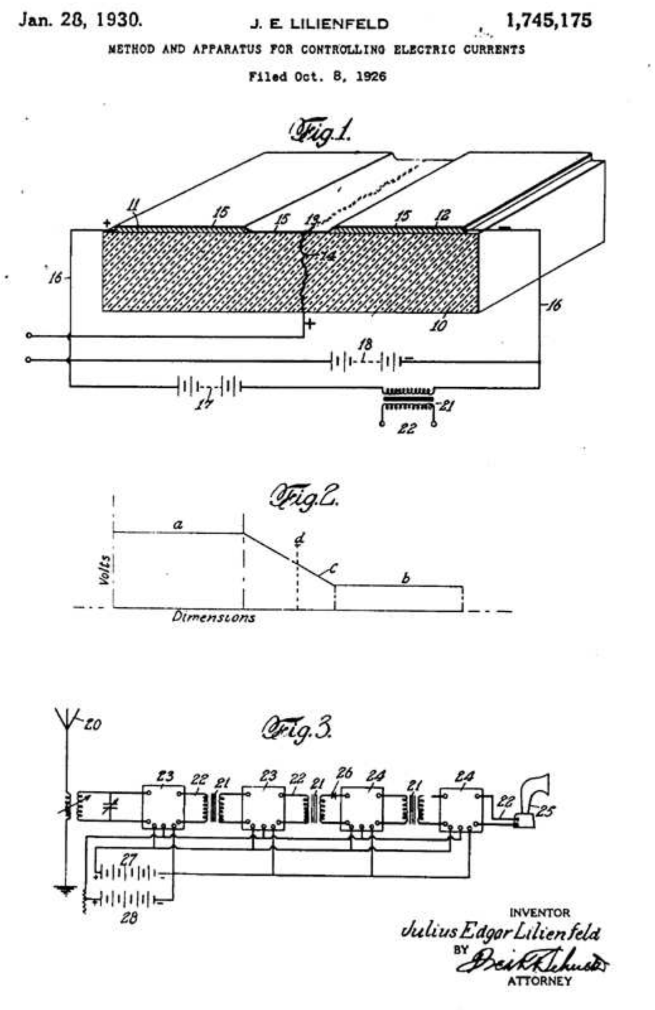
План

- Классические компьютеры
- Элементная схема: транзистор и триггер
- Наномасштабы и квантовые эффекты
- Квантовый компьютер
- Элементная база: кубит
- Эффект Джозефсона
- Сверхпроводящие кубиты
- Взаимодействующие кубиты
- Амплитудная спектроскопия
- Квантовые метаматериалы

Кассическая машина фон Неймана



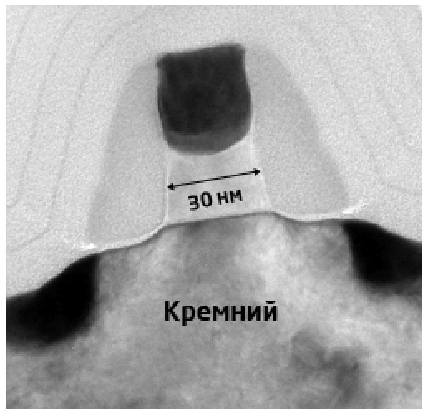
Полевой транзистор



Дж. Бардин, У. Браттейн и У. Шокли,

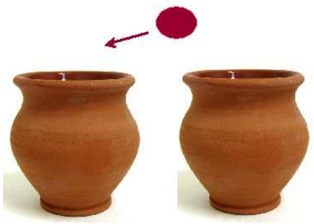
Bell Laboratories, 1947 г.

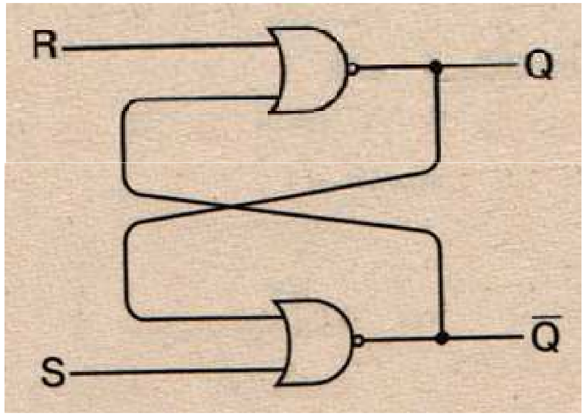
Intel



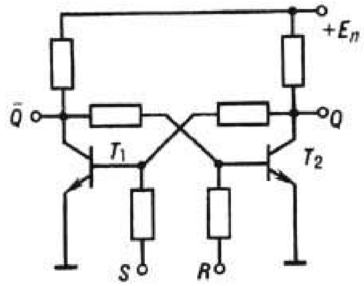
Триггер

Инки



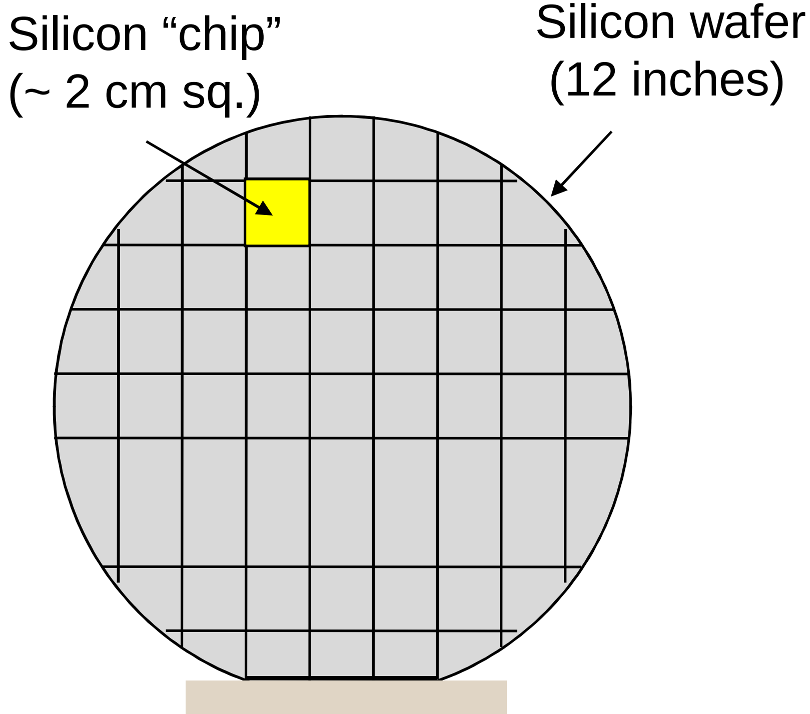


Английские физики В. Эклс и Ф. В. Джордан (1918 г.)



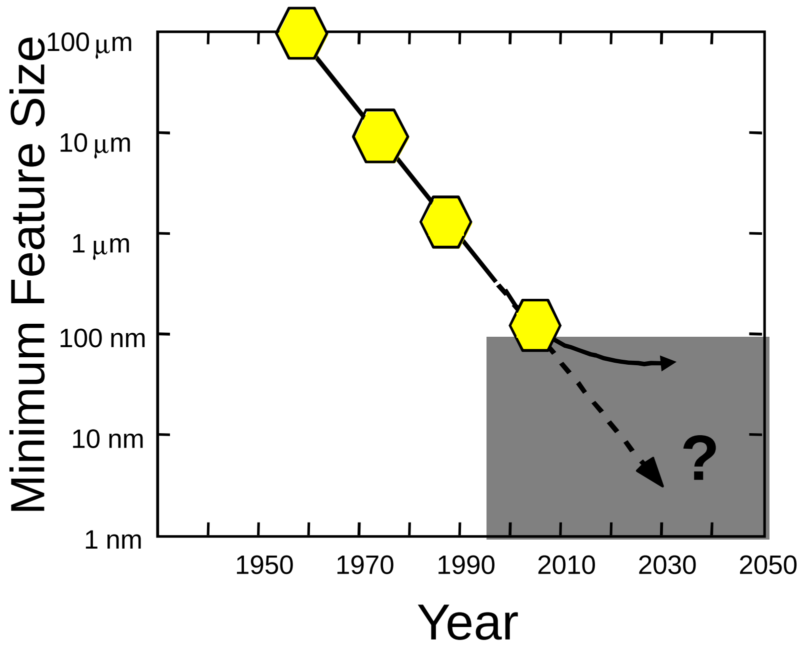
Триггер (триггерная система) — класс электронных устройств, обладающих способностью длительно находиться в одном из двух или более устойчивых состояний и чередовать их под воздействием внешних сигналов

От микро- к наноэлектронике



Currently: >200M transistors/chip

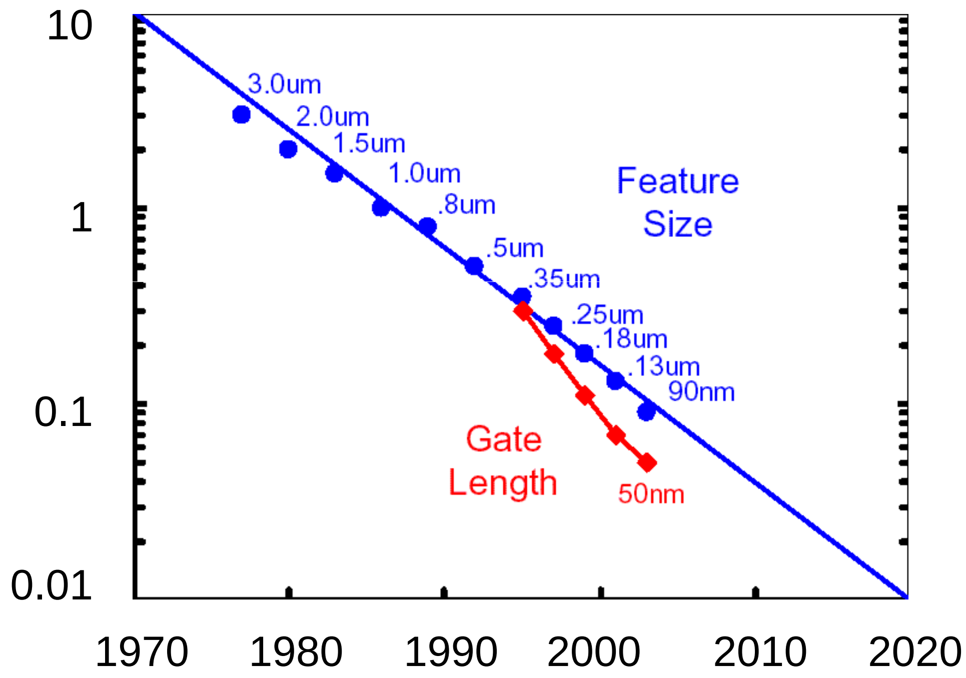
2016: ~10B transistors/chip

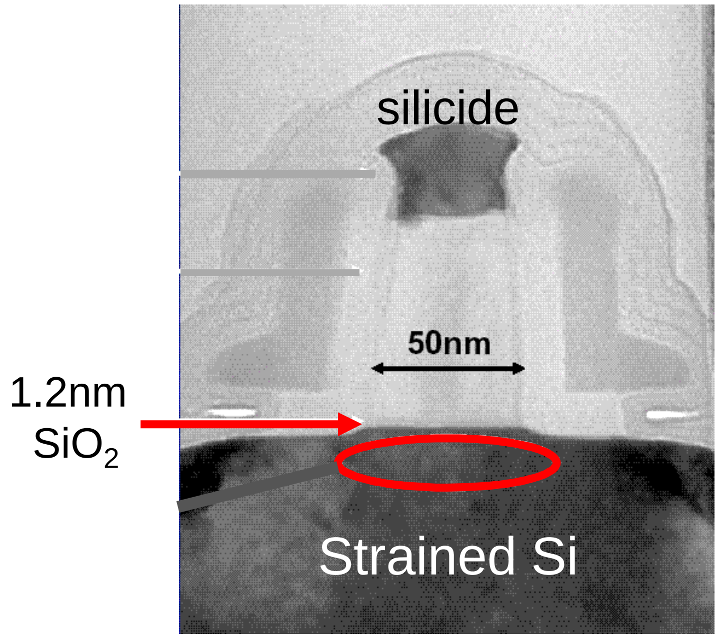


Technology generation
$L \rightarrow L/\sqrt{2}$

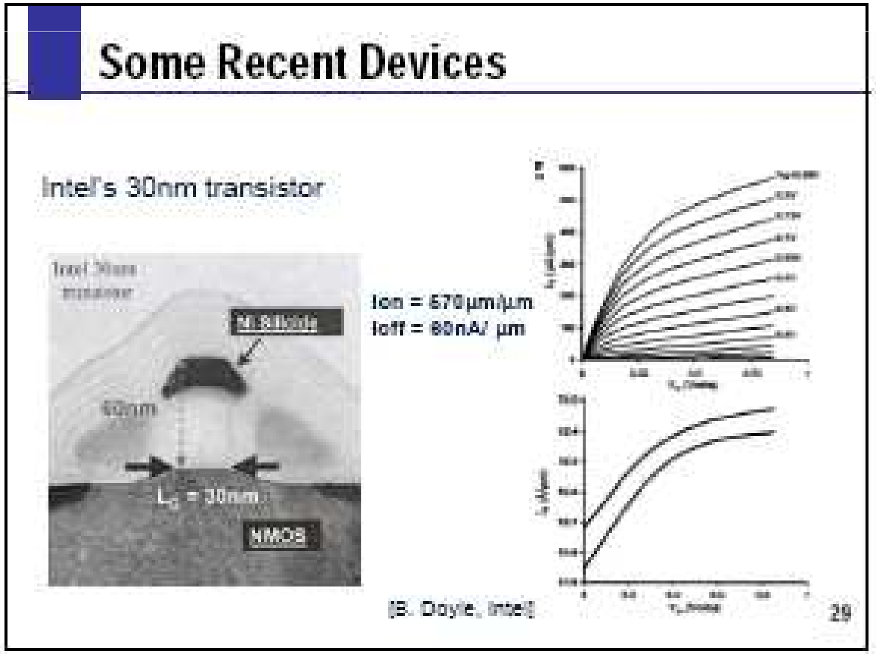
Cost per function drops 25% / yr

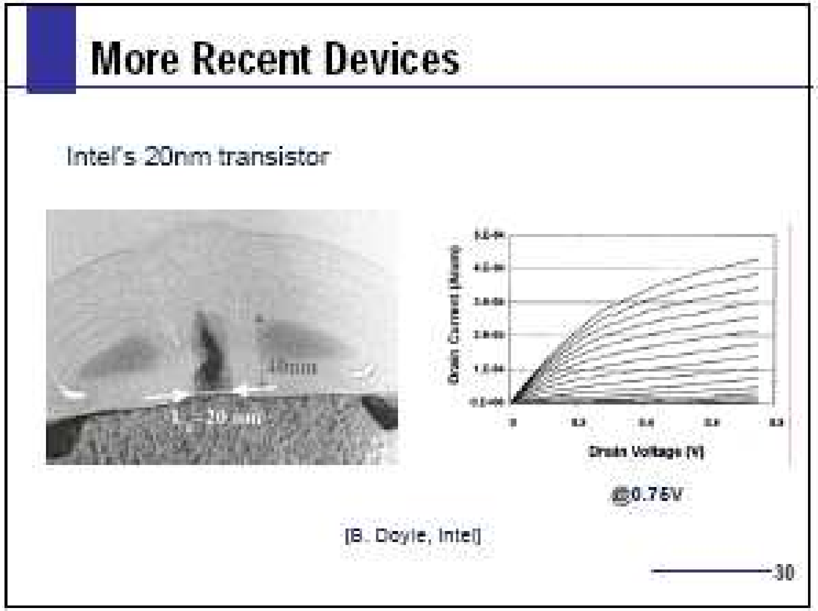
Транзисторы



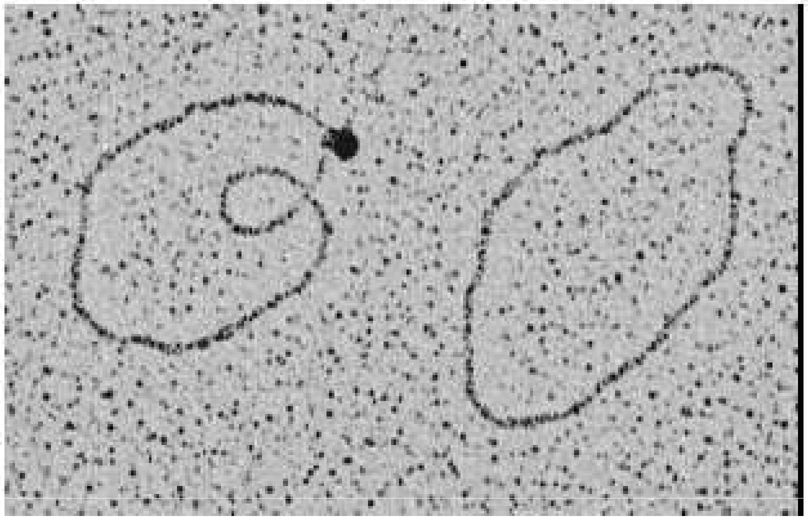


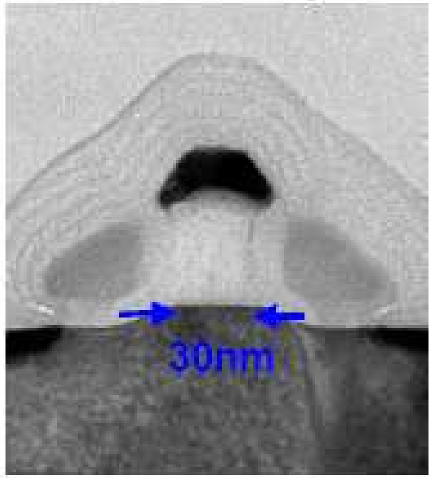
www.intel.com/research/silicon/90nm_press_briefing-technical.htm

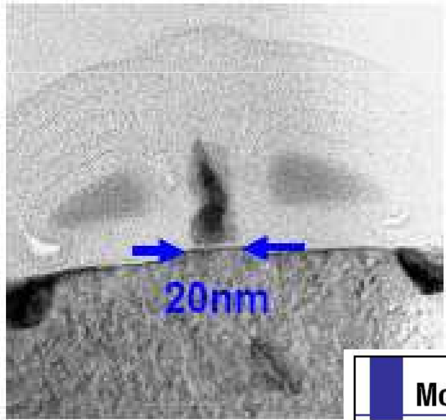

Some Recent Devices
Intel's 30nm transistor
Ni Silicide
NMOS
Ion = 670µm/µm
Ioff = 60nA/ µm
[B. Doyle, Intel]
29


More Recent Devices
Intel's 20nm transistor
Drain Voltage (V)
@0.75V
[B. Doyle, Intel]
30

Transistors as Small as DNA exist today*

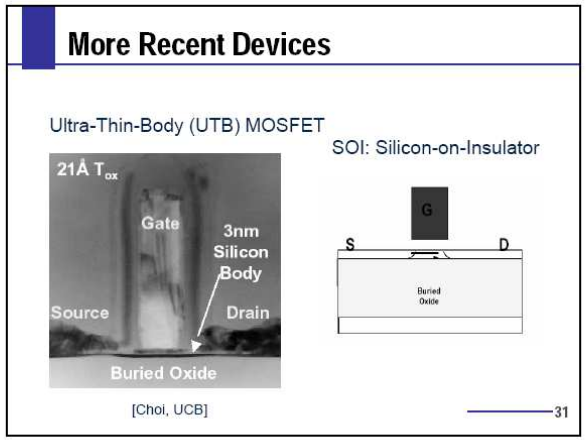




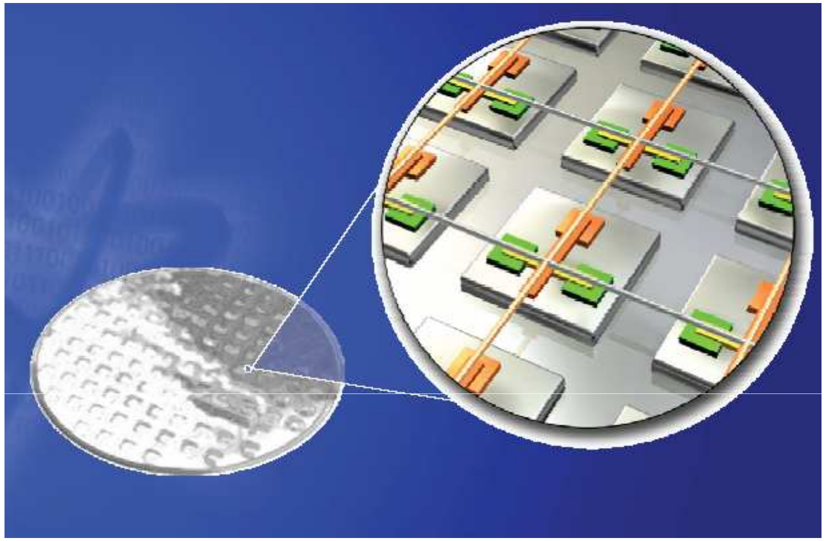


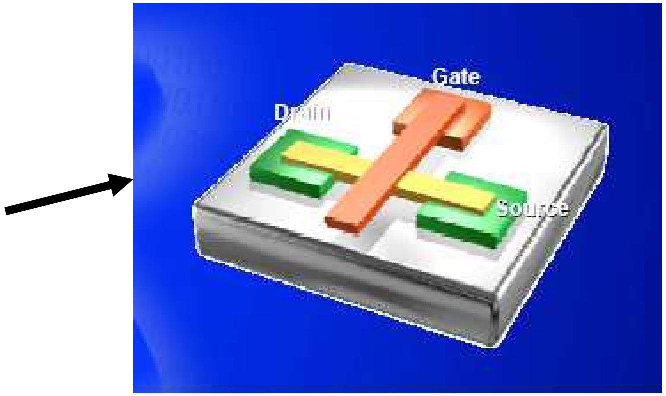
10nm Gold particle attached to Z-DNA Antibody [John Jackson & Inman. Gene 1989 84 221-226]

*Intel, 2000, 2001

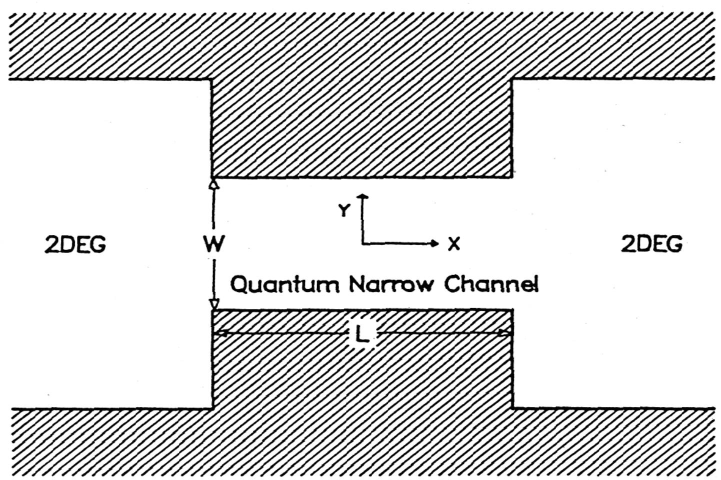


Электронный транспорт в микро- и наноструктурах





Theoretical Model



The Schrödinger equation in the 2D narrow channel

$$H\Psi(x,y) = E\Psi(x,y)$$

where

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V_c(y)$$

Квантовый компьютер

REVIEWS

Quantum computers

T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe & J. L. O'Brien, Nature, V 464, 45-53 (2010)

Over the past several decades, quantum information science has emerged to seek answers to the question: can we gain some advantage by storing, transmitting and processing information encoded in systems that exhibit unique quantum properties? **Today it is understood that the answer is yes**, and many research groups around the world are working towards the highly ambitious technological goal of building a quantum computer, which would dramatically improve computational power for particular tasks.

- Requirements for quantum computing
- Photons
- Trapped atoms
- Nuclear magnetic resonance
- Quantum dots and dopants in solids
- Superconductors
- Other technologies

Table 1 | Current performance of various qubits

Type of qubit	T_2	Benchmarking (%)		References
		One qubit	Two qubits	
Infrared photon	0.1 ms	0.016	1	20
Trapped ion	15 s	0.48†	0.7*	104–106
Trapped neutral atom	3 s	5		107
Liquid molecule nuclear spins	2 s	0.01†	0.47†	108
e^- spin in GaAs quantum dot	3 μs	5		43, 57
e^- spins bound to ^{31}P:^{28}Si	0.6 s	5		49
^{29}Si nuclear spins in ^{28}Si	25 s	5		50
NV centre in diamond	2 ms	2	5	60, 61, 65
Superconducting circuit	4 μs	0.7†	10*	73, 79, 81, 109

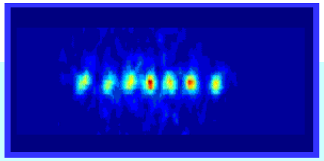
Кубиты

Требования: возможность контроля на квантовом уровне, большое время декогерентности и т.д.

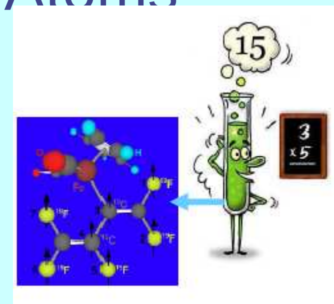
Экспериментальные системы

atomic

- Ions



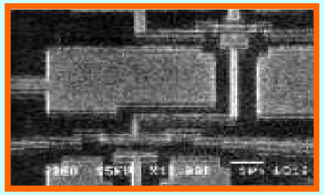
- Neutral Atoms



- CQED

mesoscopic

- NMR
- Quantum Dot

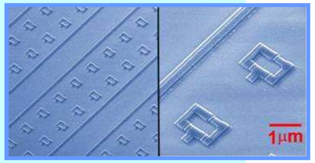


- Superconductor SET (charge)

macroscopic

- Josephson Junctions (phase)
- 3 Junction SQUID
- RF SQUID

(flux)



Coherence

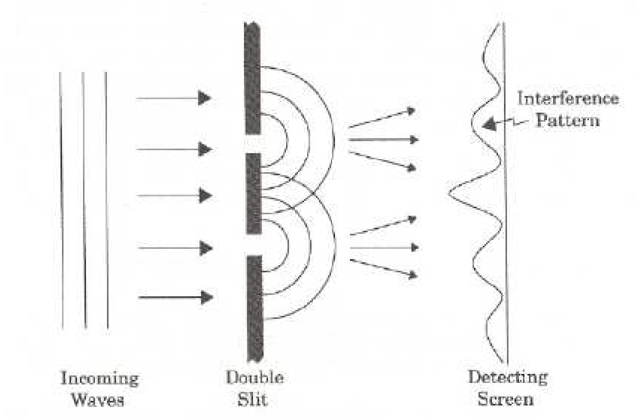
Quantum!!

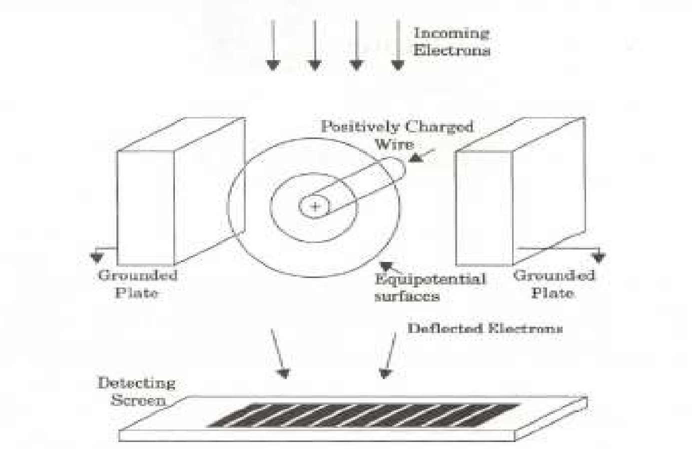
Chip?

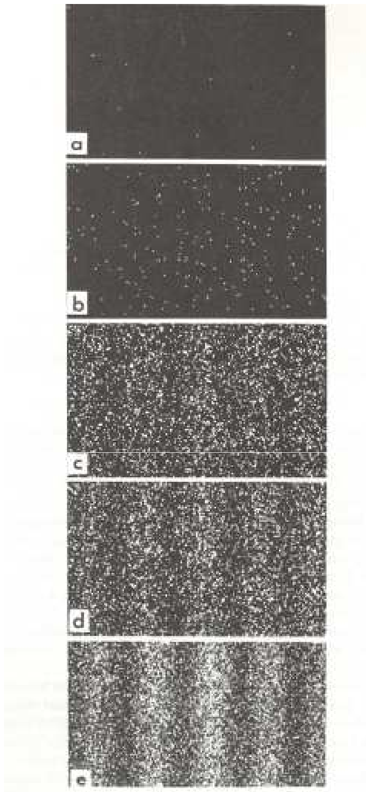
scalability
coupling

Decoherence free circuit? Quantum?

Принцип суперпозиции



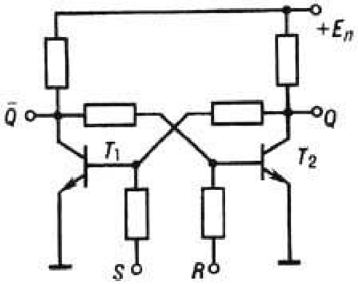


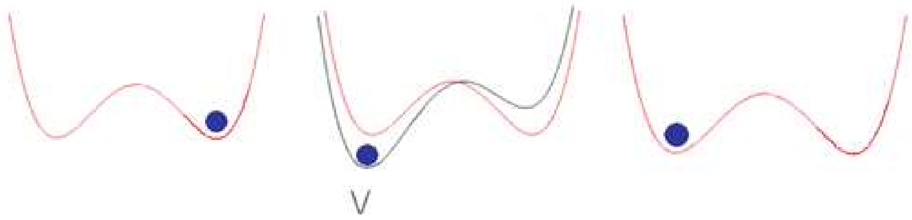


A.Tonomura, Am.J.Phys.57,117(1989)

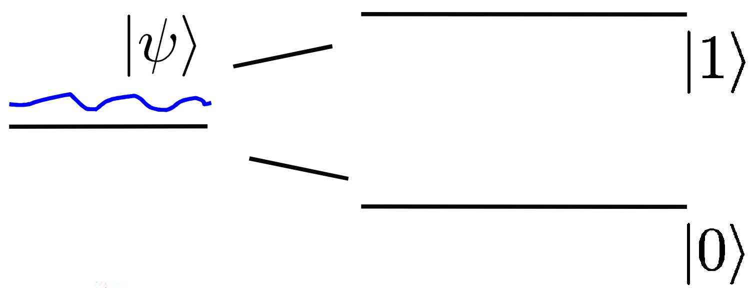
Двухуровневая система

Классика

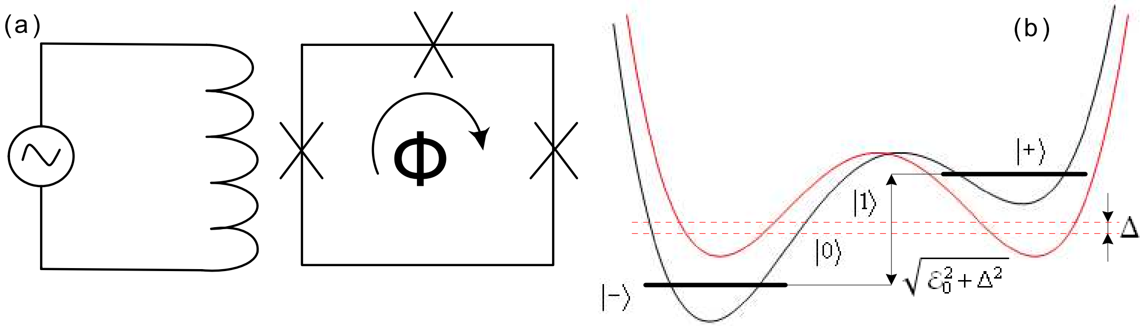




$0 \rightarrow 1$



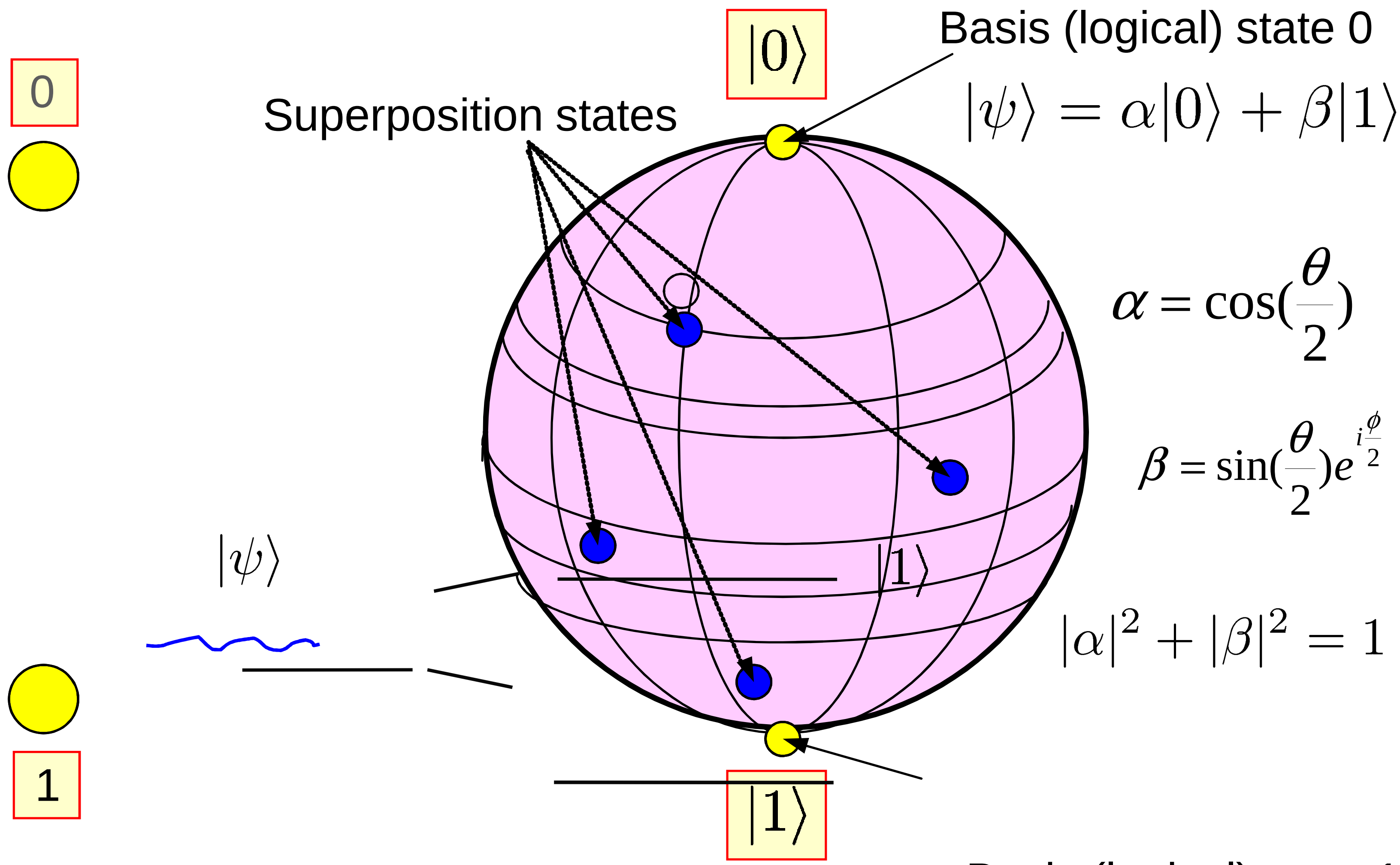
Квантовая система



$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

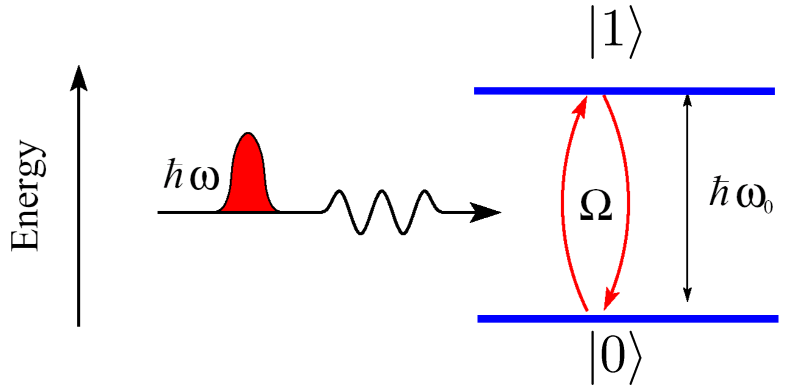
Бит и кубит



(a) One bit

(b) One qubit

Раби осцилляции в двухуровневой системе



$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega(t)}{2}\cos(\omega t)\sigma_x$$

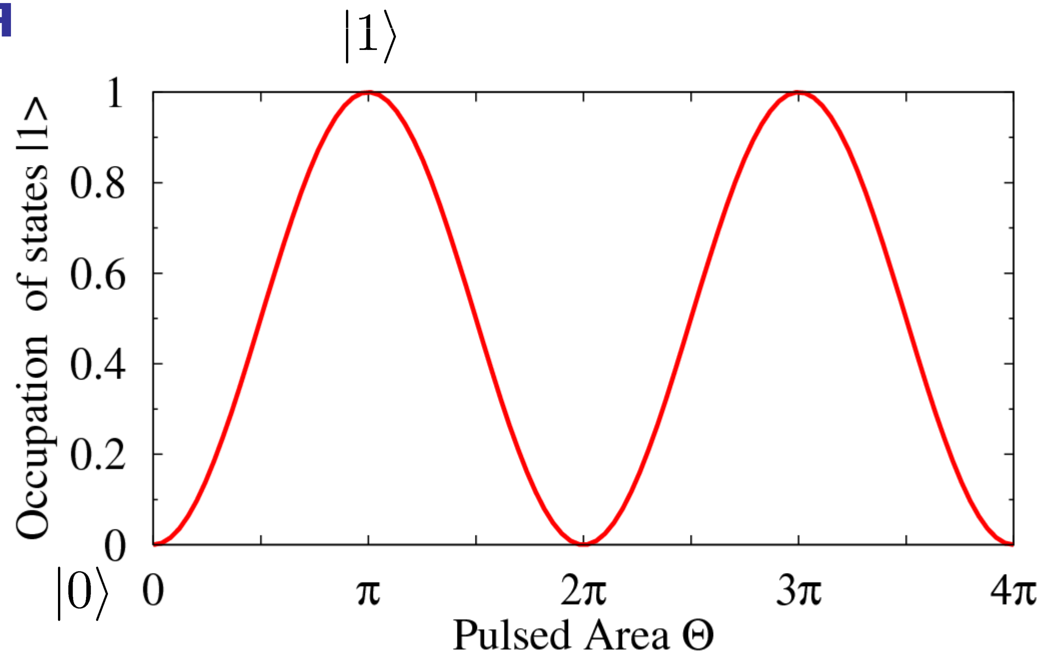
$$\Omega(t) = \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon}(t)}{\hbar}$$

$$\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

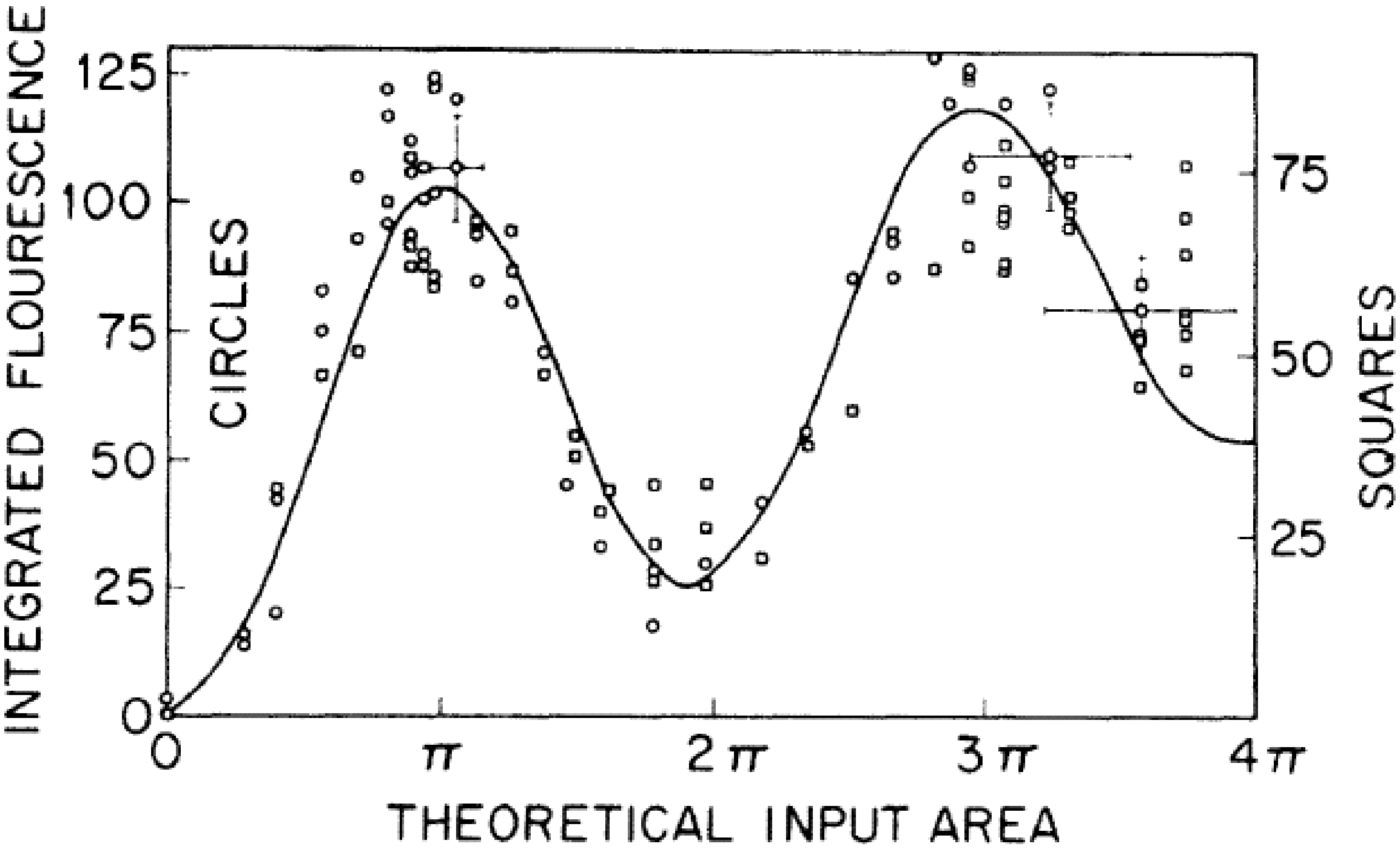
При $\omega = \omega_0$ (используя приближение RWA)

$$P_{0\to 1}(t) = \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right)$$

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\tau} \Omega(t)dt$$



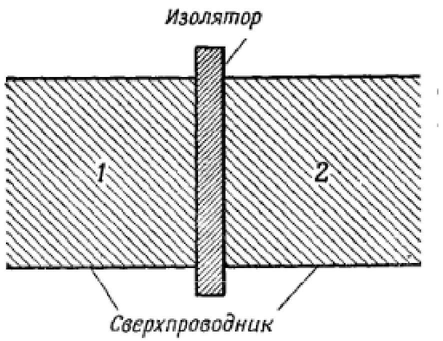
Экспериментальное наблюдение в атомных системах



H. M. Gibbs, Phys. Rev. A **8**, 446 (1973)

Переходы Джозефсона

B. D. Josephson, Physics Letters, 1, 251 (1962).



Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс
ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ
9. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА (II)

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = U_1\psi_1 + K\psi_2,$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = U_2\psi_2 + K\psi_1.$$

$$\psi_1 = \sqrt{\rho_1}\, e^{i\theta_1},$$

$$\psi_2 = \sqrt{\rho_2}\, e^{i\theta_2},$$

$$J = \frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\,\sin\delta$$

$$2K\rho_0/\hbar = J_0 :$$

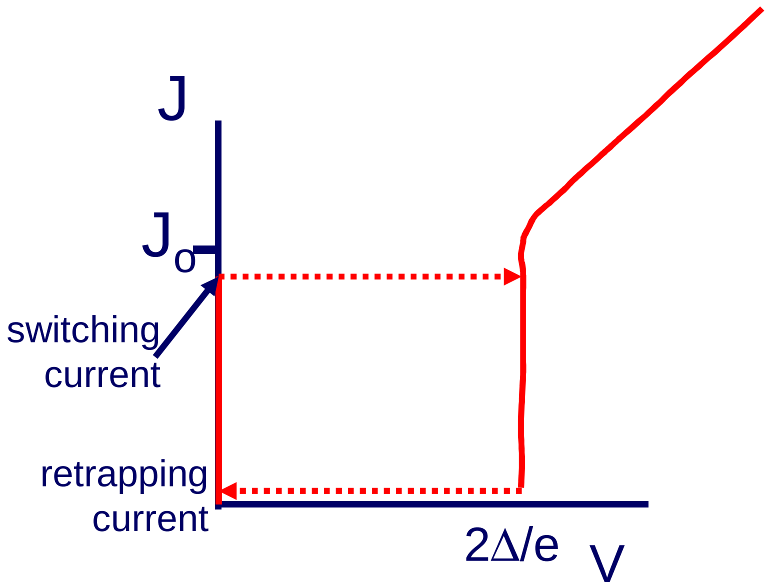
$$J = J_0 \sin\delta$$

$$\dot{\delta} = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{qV}{\hbar}$$

Уравнения Джозефсона

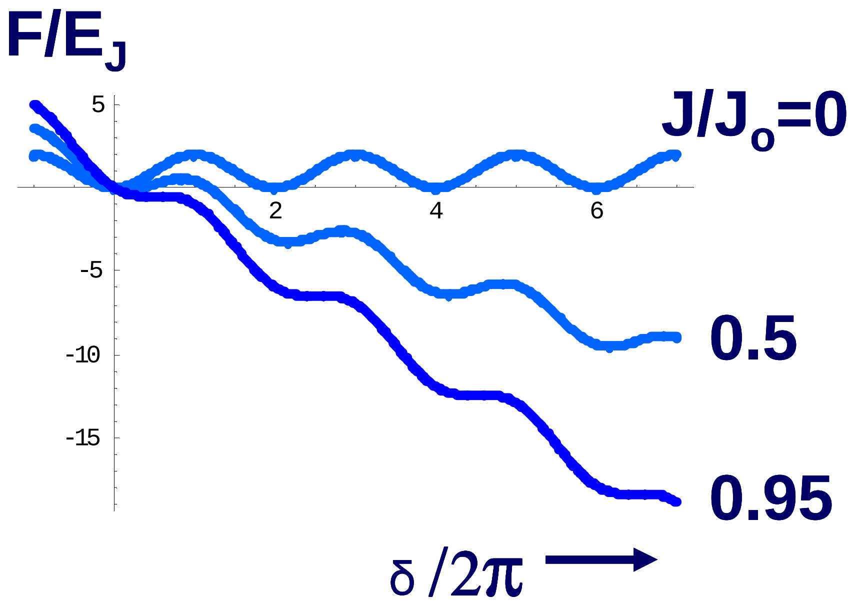
Josephson junction

$E = E_J(1-\cos\delta) = \hbar/2e\, J_o(1-\cos\delta) \Leftrightarrow J = J_o \sin\delta$



with current, Gibbs free energy

$F = \hbar/2e\, J_o(1-\cos\delta - \delta\, J/J_o)$



Energy:

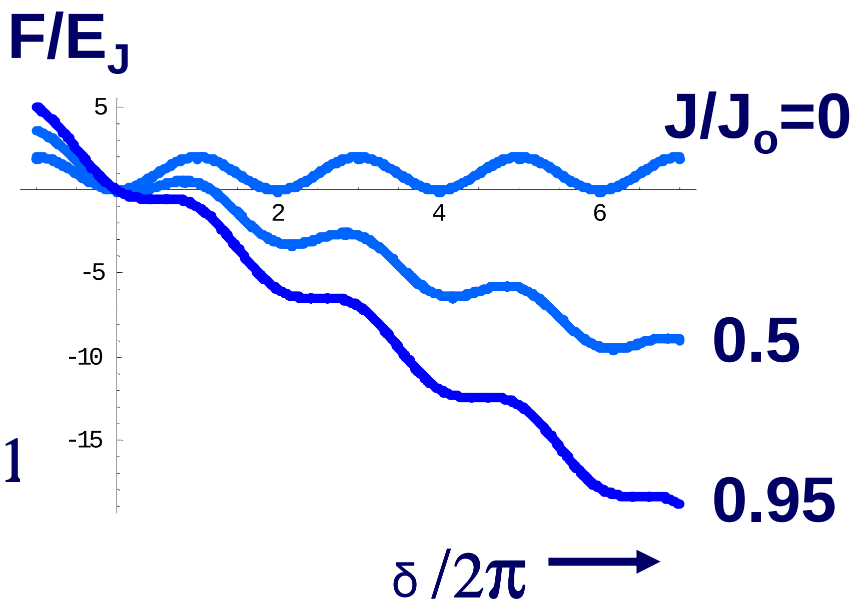
$$E = \frac{CV^2}{2} + E_J(1-\cos\delta) = \frac{C(\hbar/2e)^2}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + E_J(1-\cos\delta)$$

C $\rightarrow$ 'mass'

$\delta \rightarrow$ 'position'

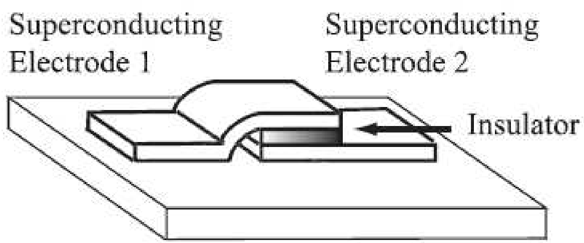
Q$\rightarrow$ 'momentum'

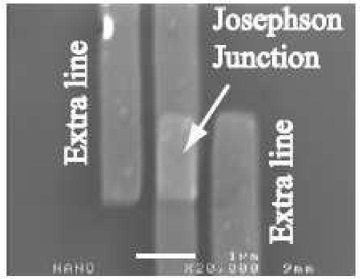
Heisenberg uncertainty $\Delta\delta\,\Delta n > 1$



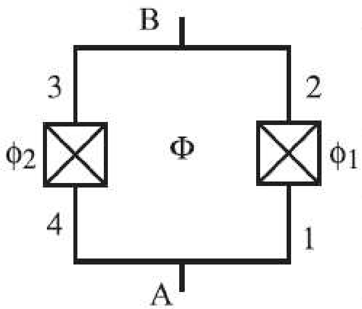
Реализация JJ

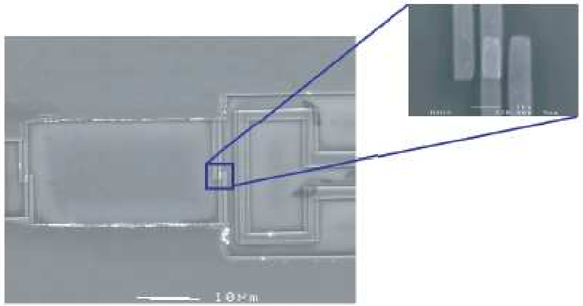
Переход Джозефсона

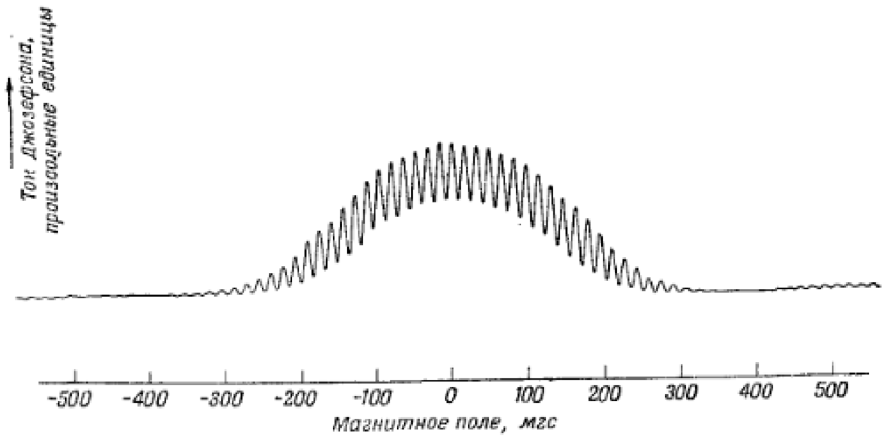




SQUID





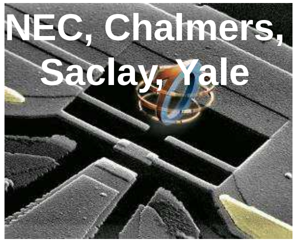


Запись тока через два параллельных перехода Джозефсона как функции магнитного поля в области между двумя переходами.

Кубиты на основе сверхпроводящих элементов – «сверхпроводящие кубиты»

Малая диссипация

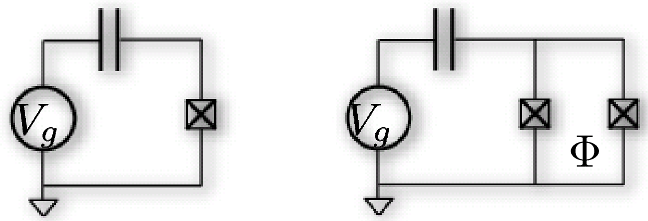
Нелинейность



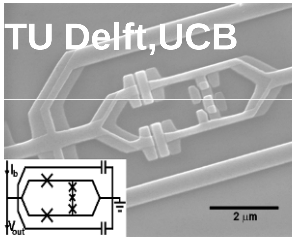
charge qubit

$E_J = E_C,$

$E_J = 50E_C$

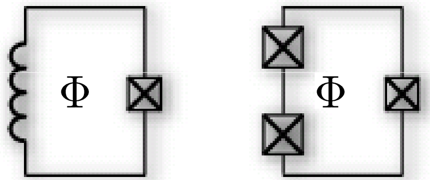


Nakamura et al., NEC Labs
Vion et al., Saclay
Devoret et al., Schoelkopf et al., Yal
Delsing et al., Chalmers

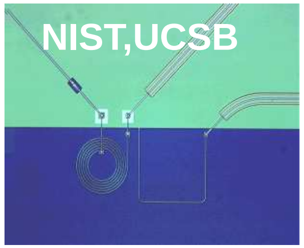


flux qubit

$E_J = 40\text{-}100E_C$

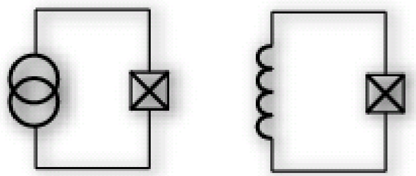


Lukens et al., SUNY
Mooij et al., Delft
Orlando et al., MIT
Clarke, UC Berkeley



phase qubit

$E_J = 10{,}000E_C$

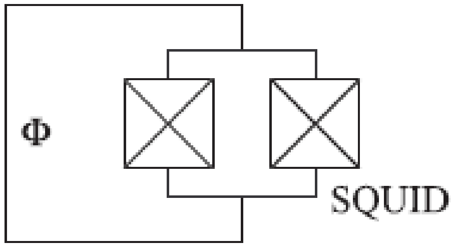


Martinis et al., UCSB
Simmonds et al., NIST
Wellstood et al., U Maryland

Reviews:

Yu. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, Rev. Mod. Phys. 73, 357 (2001)
M. H. Devoret, A. Wallraff and J. M. Martinis, *cond-mat/0411172* (2004)
J. Q. You and F. Nori, Phys. Today, Nov. 2005, 42
J. Clarke, F. K. Wilhelm, Nature 453, 1031 (2008)

A Simplest Flux Qubit



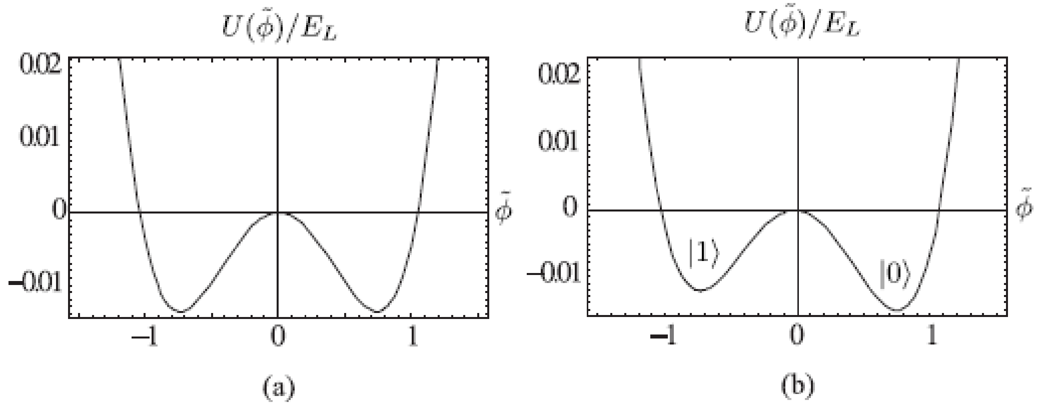
$$H = \frac{1}{2}CV^2 + \frac{1}{2}LI^2 - E_J \cos\phi$$

$$U(\phi) = -E_J \cos\phi + \frac{1}{2}E_L(\phi - \phi_{\text{ext}})^2.$$

$$E_C = \frac{(2e)^2}{C}, \quad E_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2, \quad \phi_{\text{ext}} = \frac{2\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}$$

$$f \equiv \phi_{\text{ext}} - \pi .$$

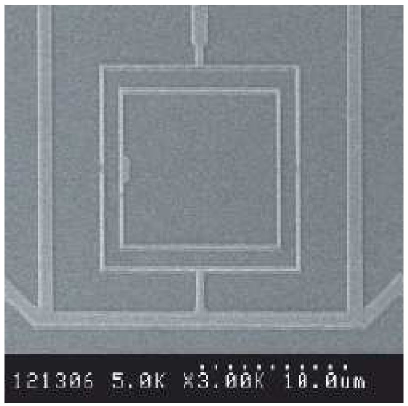
$$\varepsilon \equiv E_J/E_L - 1$$



Potential energy $U(\tilde{\phi})/E_L$ for a flux qubit. (a) $f = 0$ and $\varepsilon = 0.1$ and (b) $f = 0.002$ and $\varepsilon = 0.1$.

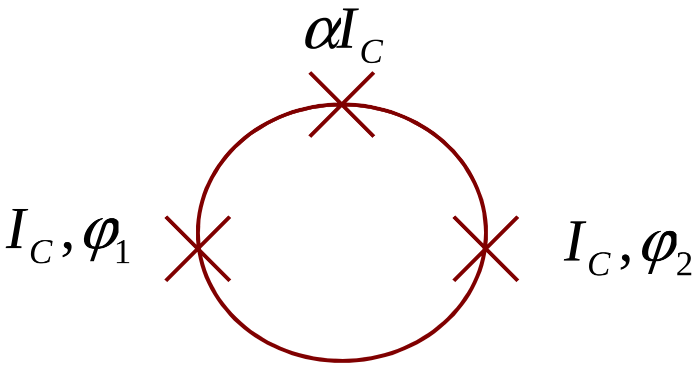
$$H = -\frac{B_z}{2}\sigma_z - \frac{B_x}{2}\sigma_x.$$

$$B_z(\phi_{\text{ext}}) = \Delta U(\phi_{\text{ext}}) = 2\sqrt{6\varepsilon}(\phi_{\text{ext}} - \pi)E_L$$

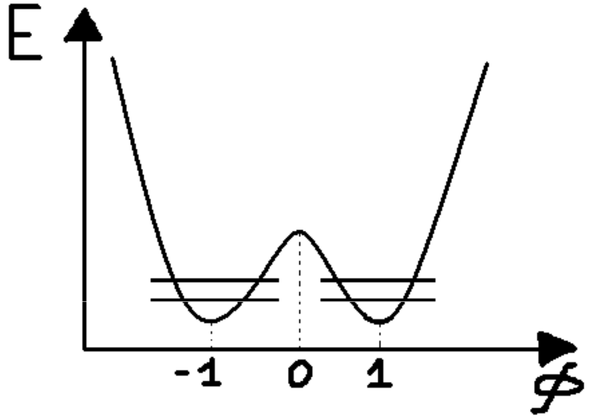


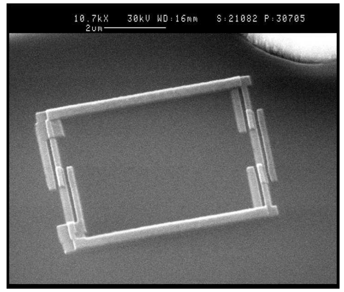
J. Johansson *et al.*, Physical Review Letters **96**, 127006 (2006).

Three-Junction (3JJ) Flux Qubit



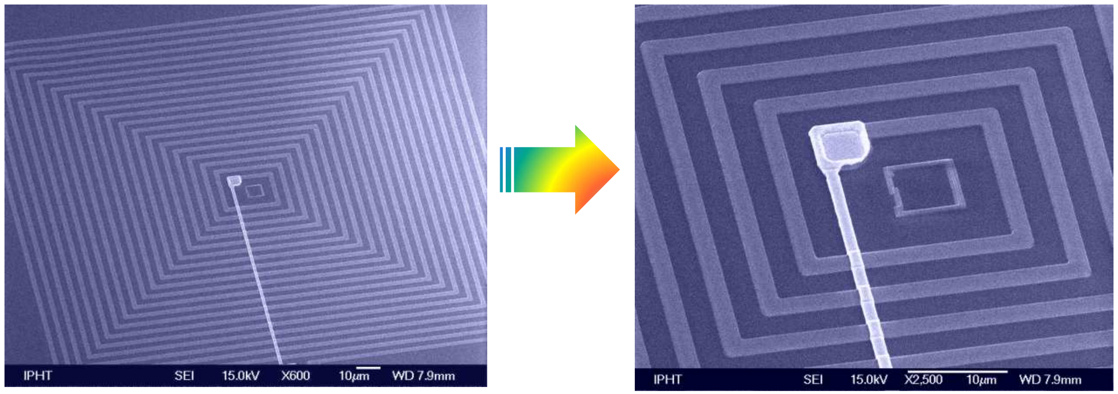
E. Il'ichev и др, Institute of Photonic Technology





Зависимость энергии от разности фаз

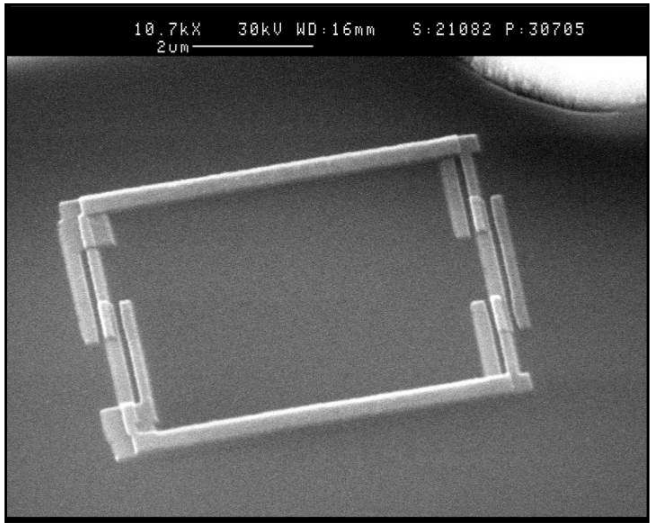
This idea was dusted off by
J.E. Mooij *et al.*, Science **285**, 1036, 1999



Джозефсоновский кубит в LC катушке

Persistent current qubits

Al



Е. Ильичев, А. Измалков и др,
Institute of Photonic Technology

material: Aluminum,

shadow-evaporation technique,

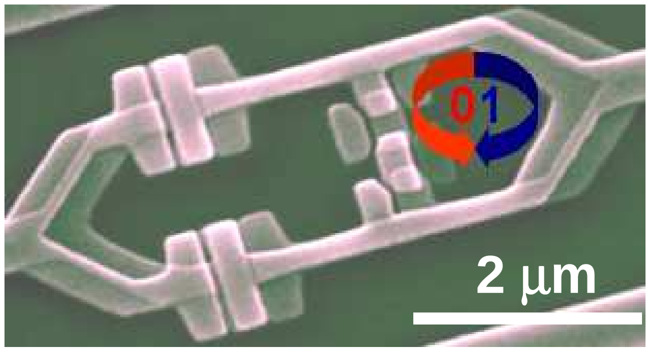
two junctions 600x200nm

$I_C \approx$ 600 nA,

the third one is smaller:

$a = E_{J1} / E_{J2,3} \sim 0.8 \ldots 0.9$,

inductance $L \approx$ 20-40 pH.

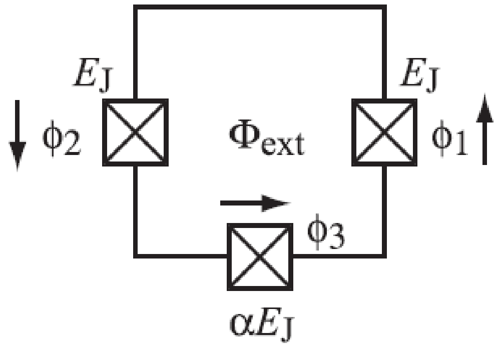


J.E. Mooij *et al.*, Science 285, 1036, 1999

flux qubit/Delft

$E_J/E_C \sim 40$

Three-Junction (3JJ) Flux Qubit

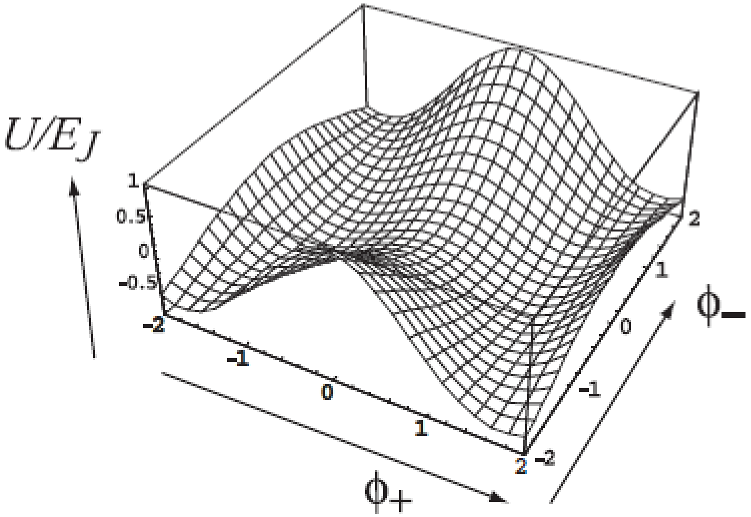


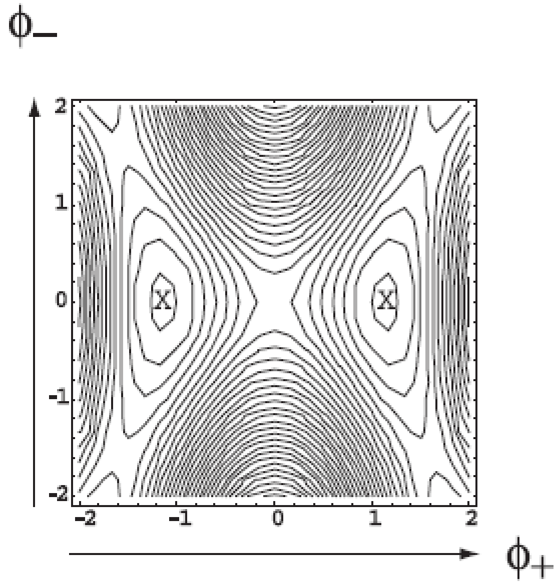
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 2\pi \frac{\Phi_{\mathrm{ext}}}{\Phi_0} \equiv \pi + f.$$

$$f = \frac{2\pi}{\Phi_0}\left(\Phi_{\mathrm{ext}} - \frac{\Phi_0}{2}\right).$$

$$\phi_\pm \equiv \frac{\phi_1 \pm \phi_2}{2}$$

$$\begin{aligned} U(\phi_+, \phi_-) &= -E_J(\cos\phi_1 + \cos\phi_2) - \alpha E_J \cos\phi_3 \\ &= -E_J\left[2\cos\phi_+ \cos\phi_- - \alpha\cos(2\phi_+ - f)\right] \\ &\simeq -E_J\left[2\cos\phi_+ \cos\phi_- - \alpha\cos 2\phi_+ - \alpha f \sin 2\phi_+\right] \end{aligned}$$





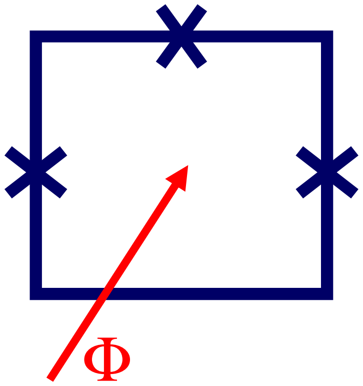
$$\boxed{H = -\frac{1}{2}\left(\in \sigma_z + \Delta \sigma_x\right)}$$

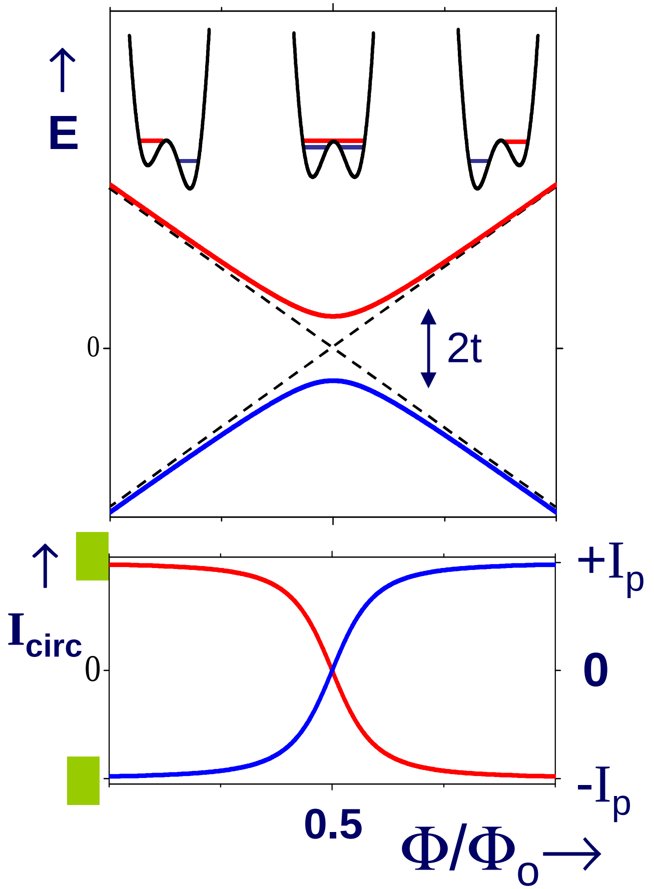
$$\in = \in_0 \left(f - \frac{1}{2}\right)$$

$$\in_0 = 2 \, | \, I_c \, | \, \Phi_0$$

Persistent-current quantum bit

flux qubit with three junctions, small geometric loop inductance



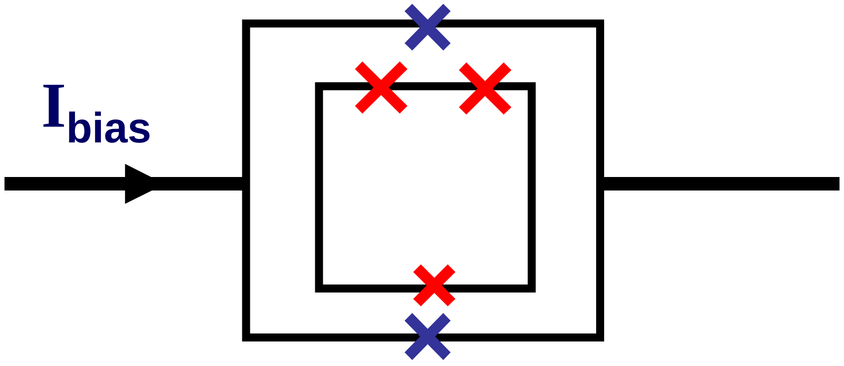


$H = h\sigma_z + t\sigma_x$

with $h=(\Phi/\Phi_o-0.5)\ \Phi_o I_p$

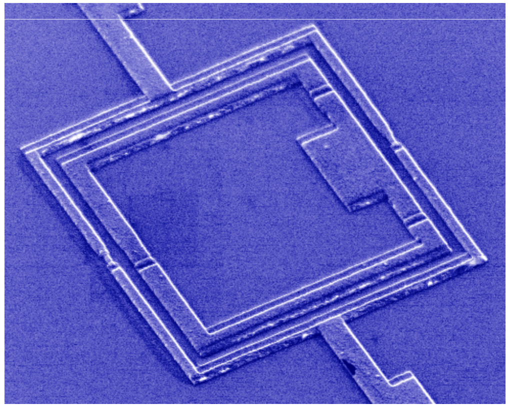
Science **285**, 1036 (1999)

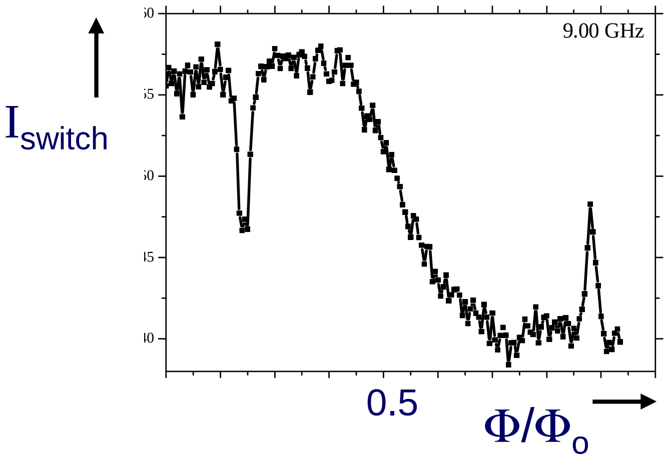
SQUID measurement



qubit generates flux $\pm L I_p \approx 10^{-3}\,\Phi_o$

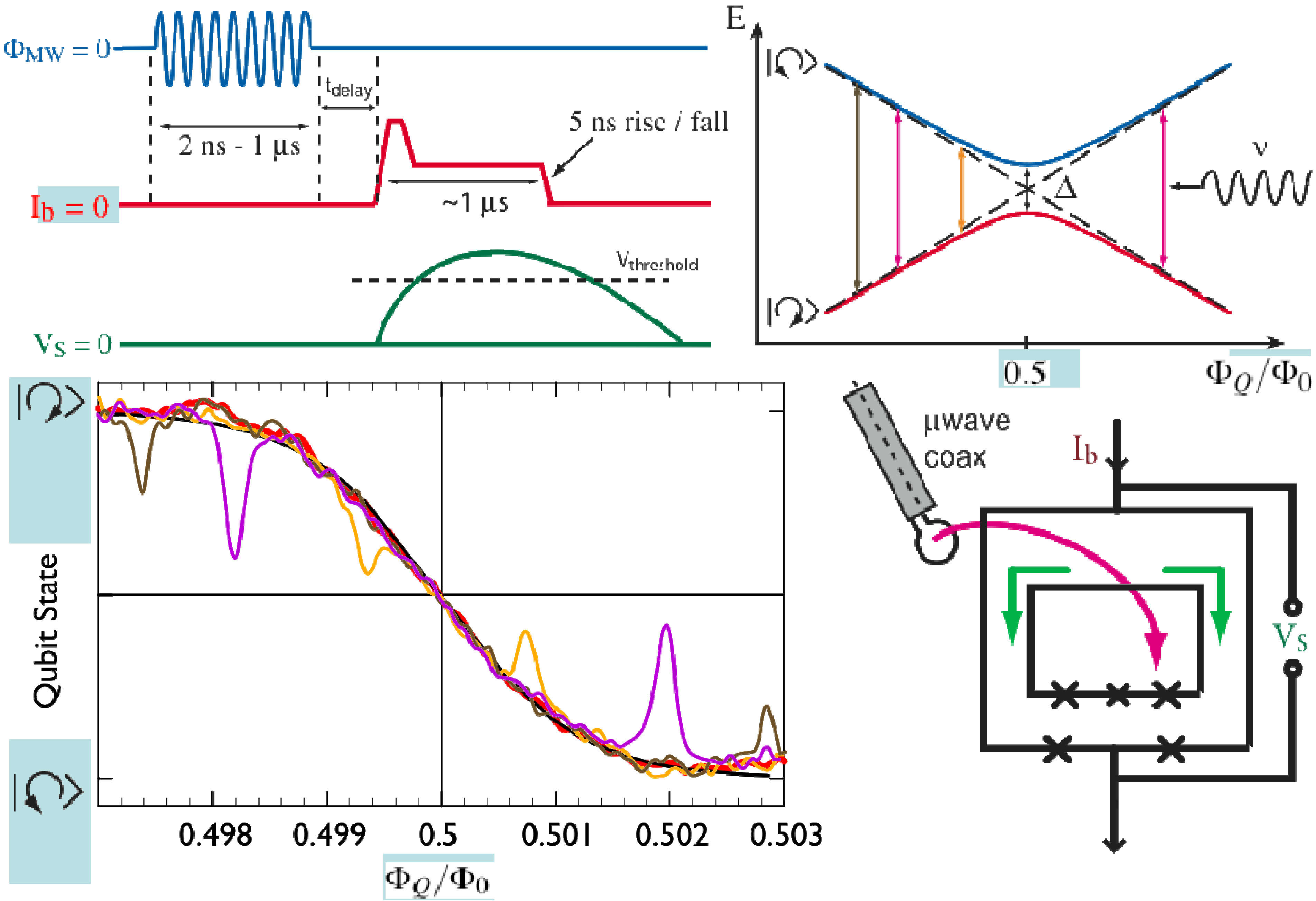
measured with
hysteretic (unshunted) SQUID
maximum supercurrent depends on
flux in the SQUID loop



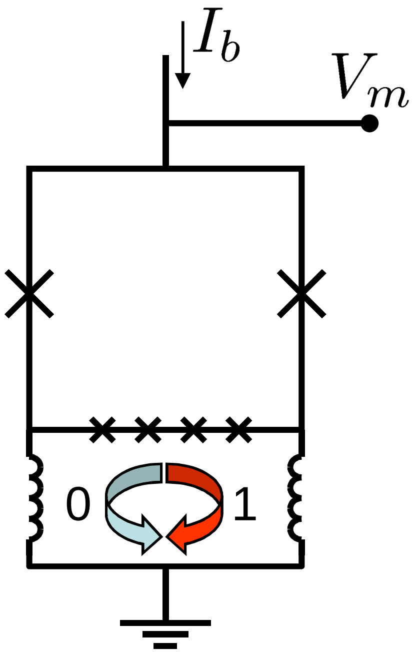


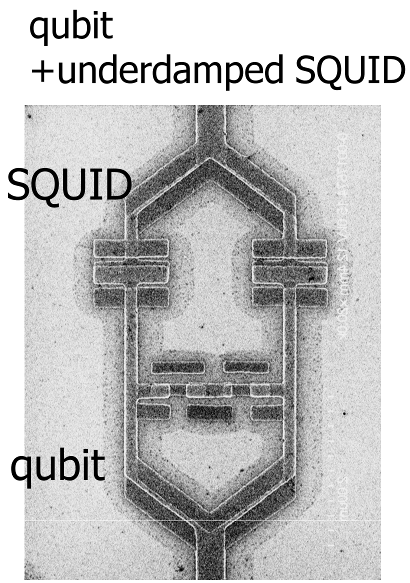
measurement switching current:
(RF 9 GHz applied)
5000-10000 ramps

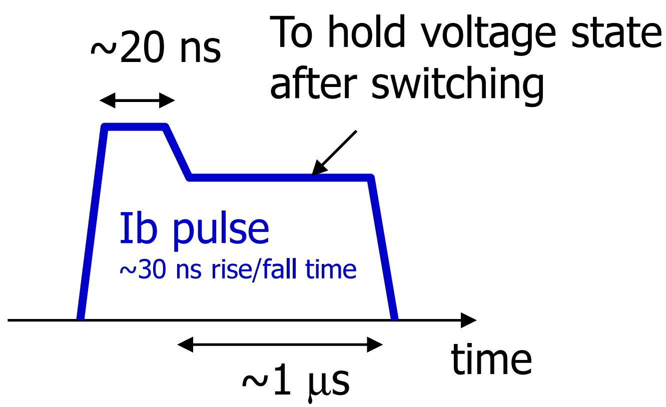
Qubit excitation and state readout

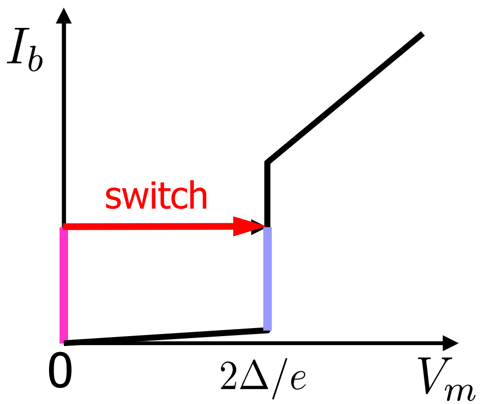


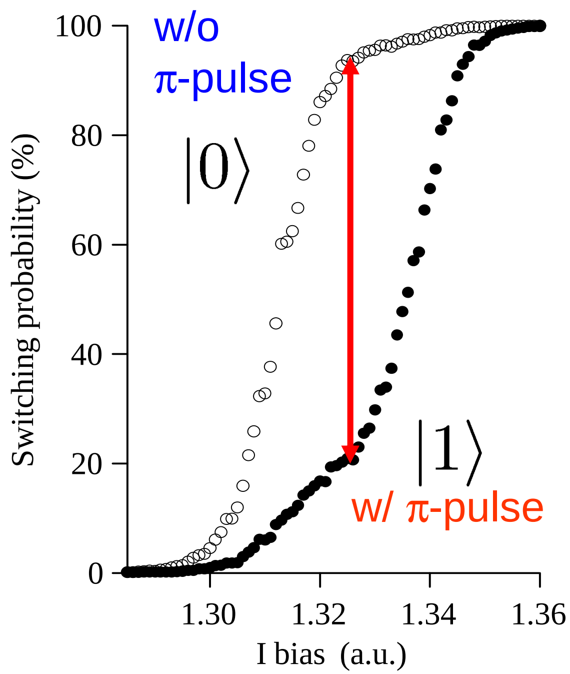
SQUID readout of flux qubit







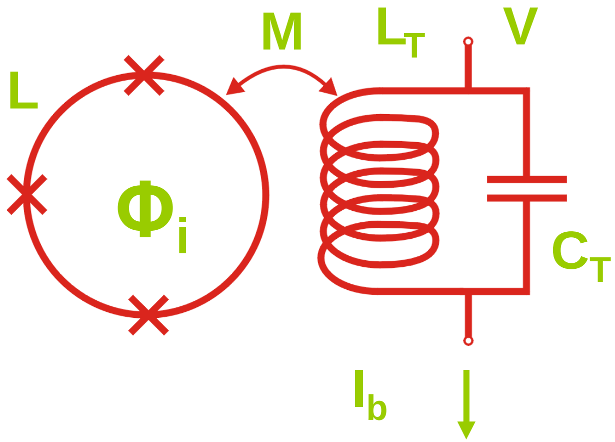




I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij, Science 299, 1869 (2003)

Tank-qubit arrangement

Phenomenologocal approach



$$\Delta > kT > h\omega$$

$$M^2 = k^2 L L_T$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eff} C_T}}$$

$$\ddot{V} + \frac{\omega_T}{Q}\dot{V} + \omega_T^{\,2} V = -M\omega_T^{\,2}\,\dot{I}_q + \frac{1}{C_T}\dot{I}_b(t)$$

$$\dot{I} = \frac{dI_q}{d\Phi}\dot{\Phi} = \frac{dI_q}{d\Phi}V; Q >> 1,$$

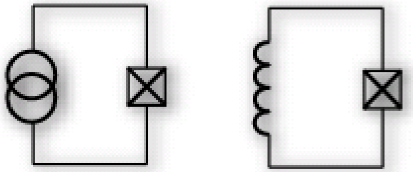
$$\Rightarrow \omega_{Tq} = \omega_T\sqrt{1 + k^2 L\frac{dI_q}{d\Phi}}; \Delta\omega << \omega_T$$

$$\Rightarrow \Delta\omega \cong \omega_T k^2 L\frac{dI_q}{2d\Phi} = \omega_T k^2 L\frac{d^2E}{2(d\Phi)^2};$$

Е.Ильичев, А.Измалков и др.

Phase qubit

phase qubit

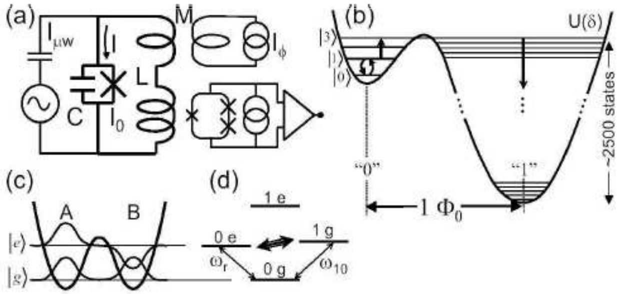


Martinis et al., UCSB
Simmonds et al., NIST
Wellstood et al., U Maryland

$E_J = 10{,}000 E_C$

phase qubit/NIST/UCSB

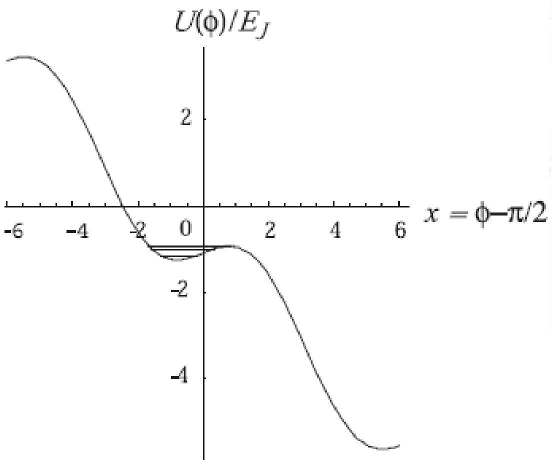
$$E_J/E_C \sim 10^4$$

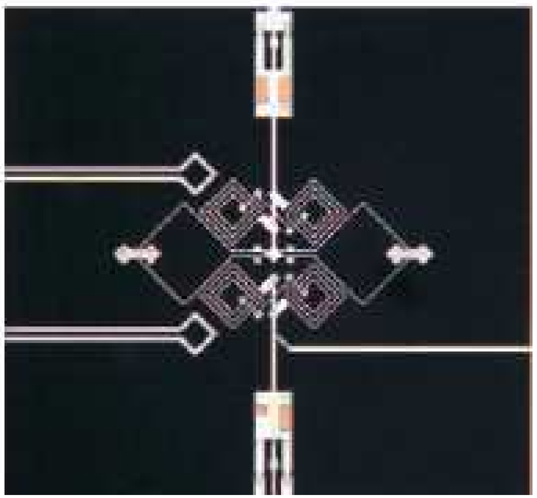


Martinis **NIST**

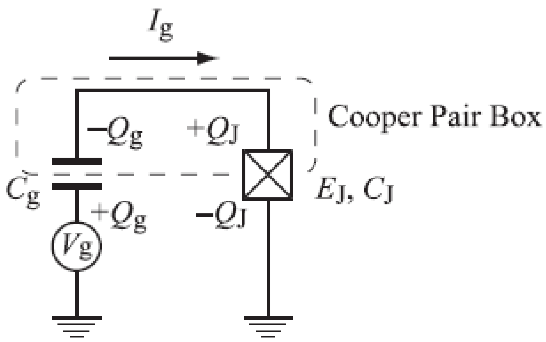
$$H = -\frac{E_C}{2}\frac{d^2}{d\phi^2} + U(\phi),$$

$$U(\phi) = -E_J\left(\cos\phi + \frac{I_{\text{ext}}}{I_c}\phi\right).$$





Charge Qubit



$$e^{\pm i\phi}|N) = e^{\mp\partial/\partial N}|N) = |N \mp 1)$$

$$H = \sum_{N\in\mathbb{Z}} \left[\frac{E_C}{2}(N-N_g)^2|N)(N| - \frac{E_J}{2}\left(|N)(N+1| + |N+1)(N|\right)\right]$$

$$L = \frac{1}{2}C_J V_J^2 + \frac{1}{2}C_g(V_g - V_J)^2 + E_J\cos\phi.$$

$$\pi = \frac{\partial K}{\partial\dot{\phi}} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 (C_J + C_g)\dot{\phi} + \frac{\hbar}{2e}C_g V_g.$$

$$H = \frac{1}{2}E_C(N - N_g)^2 - E_J\cos\phi,$$

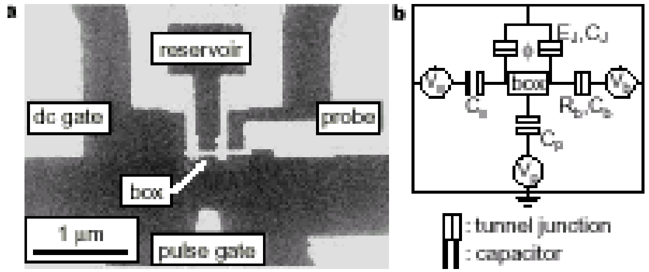
$$E_C = \frac{(2e)^2}{C_g + C_J}. \qquad N_g = \frac{C_g V_g}{2e}$$

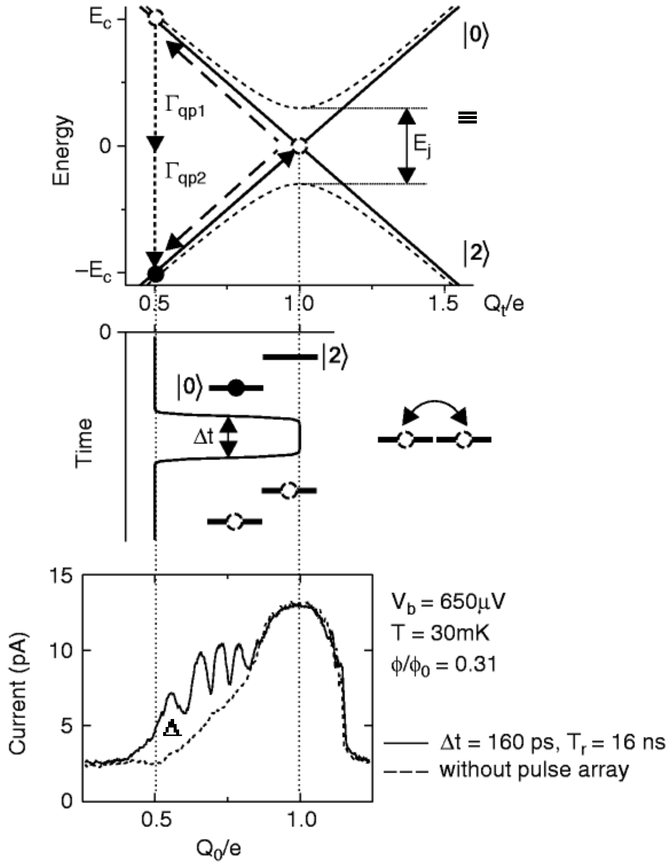
$$\begin{aligned} H &= \frac{E_C}{2}\left[N_g^2|N)(N| + (1-N_g)^2|N+1)(N+1|\right] \\ &\quad - \frac{E_J}{2}\left[|N)(N+1| + |N+1)(N|\right] \\ &= \frac{E_C}{2}\begin{pmatrix} N_g^2 & 0 \\ 0 & (1-2N_g+N_g^2)\end{pmatrix} - \frac{E_J}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}B_z\sigma_z - \frac{1}{2}B_x\sigma_x, \end{aligned}$$

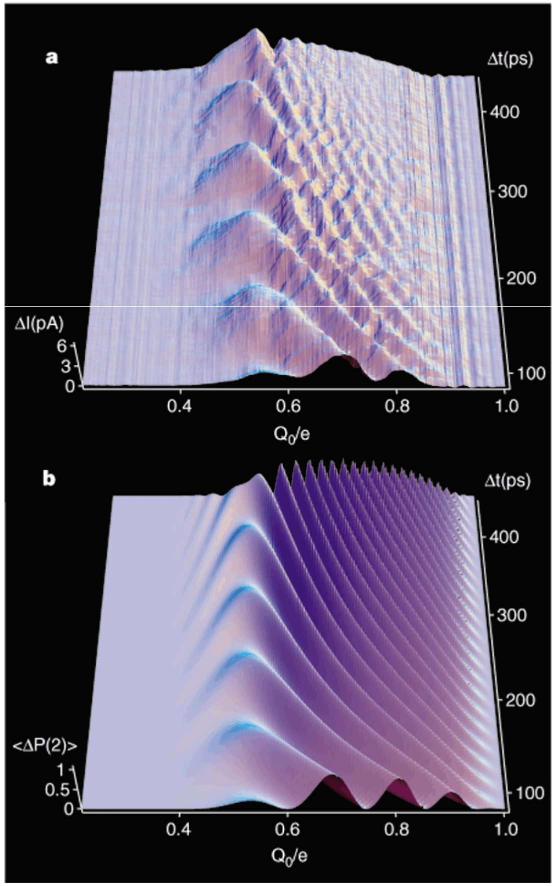
$$B_z = \frac{E_C}{2}(1 - 2N_g), \;\; B_x = E_J.$$

Nakamura, Pashkin, Tsai

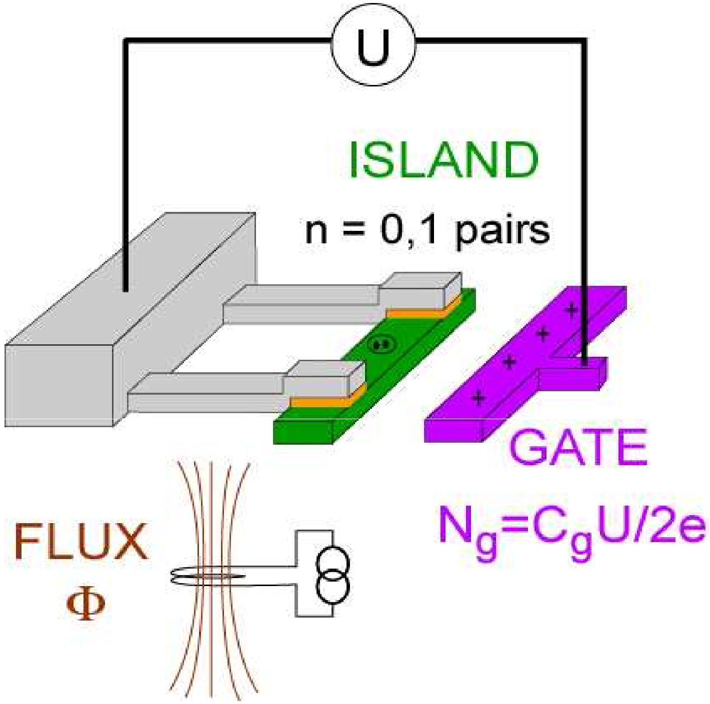
Nature 398, 786 (1999)

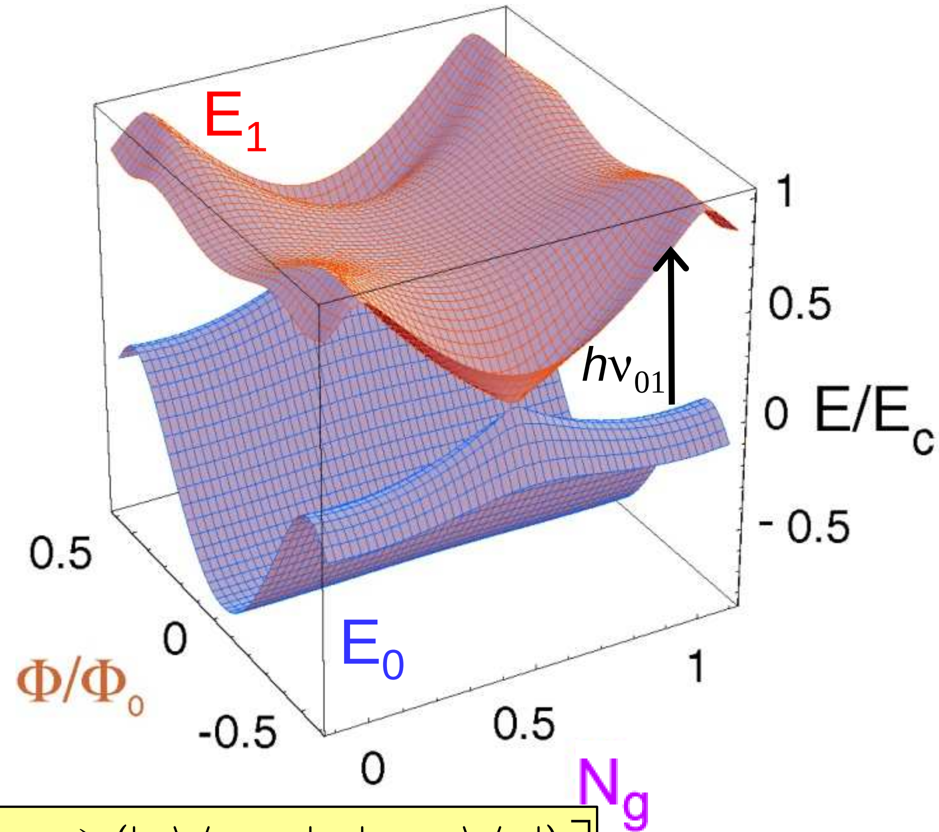






SPLIT COOPER PAIR BOX QUBIT:
THE "ARTIFICIAL ATOM"
with two control knobs





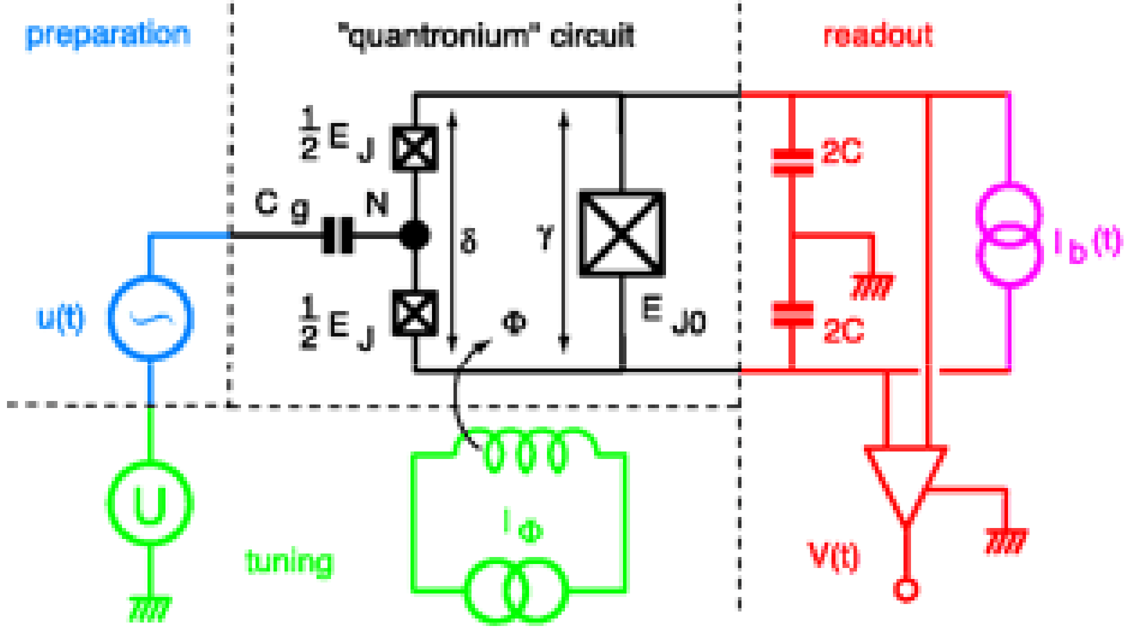
$$\hat{H} = \sum_n \left[E_C (n - N_g)^2 |n\rangle\langle n| \quad - \quad E_j \cos\left(\frac{\pi \Phi}{\Phi_0}\right) \frac{\left(|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\right)}{2} \right]$$

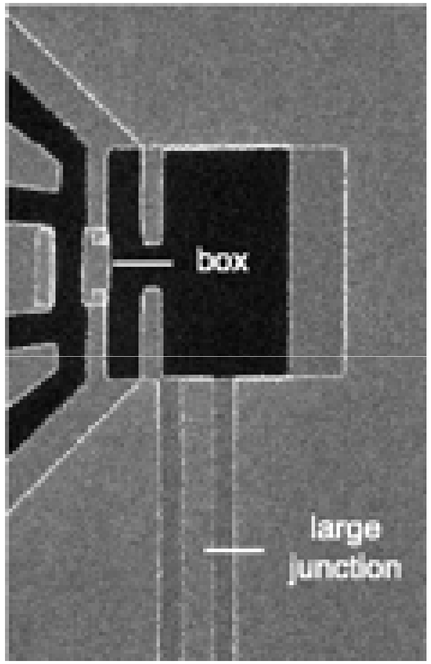
THE Hamiltonian

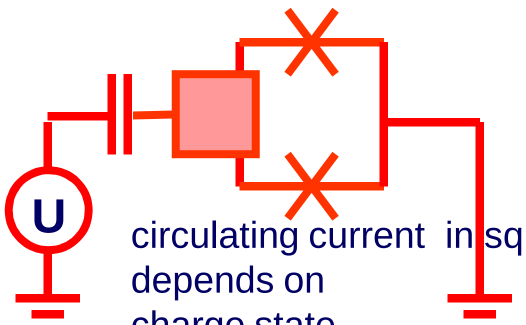
*[Devoret & Martinis, QIP, **3**, 351-380(2004)]*

Charge qubit with phase read-out

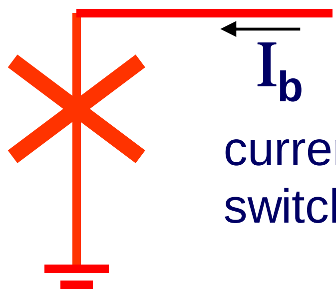
D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, M.H. Devoret, Science 296, 886 (2002)







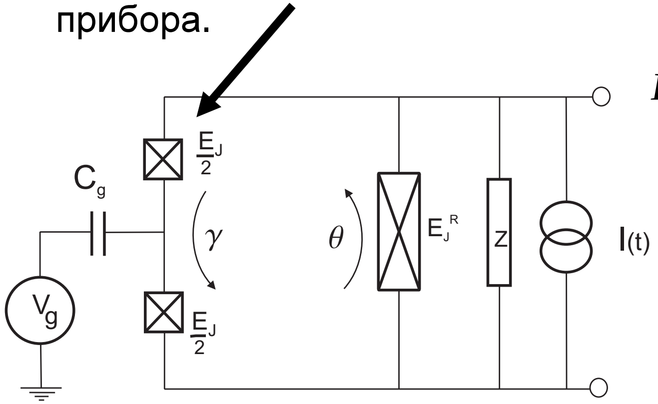
circulating current in squid loop
depends on
charge state



current pulse
switch or no switch

Взаимодействие зарядового кубита с джозефсоновским осциллятором

Два «левых» джозефсоновских перехода играют роль кубита, правый - измерительного прибора.



$$H = 4E_C\left(N - \frac{C_g V(t)}{2e}\right)^2 - \left(E_J \cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\gamma + \frac{Q^2}{2C} - E_J^R \cos\theta - \frac{\hbar^2}{2e} I(t)\theta$$

Принимая во внимание только два состояния нижних состояния нелинейного осциллятора, зависящего от γ, получим

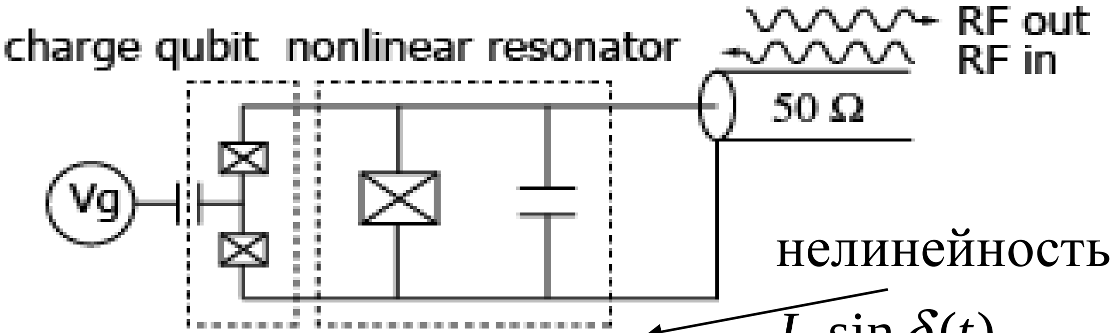
$$H \cong 2E_C \frac{C_g V_{rf}(t)}{e}\sigma_x - E_J\sigma_z + \frac{Q^2}{2C} + E_J(1+\lambda\sigma_z)\frac{\theta^2}{2} - E_J\left(1+\frac{\lambda}{4}\sigma_z\right)\frac{\theta^4}{4!} - \frac{\hbar^2}{2e} I(t)\theta \qquad \lambda = E_J / 4E_J^R$$

Если $V_{rf} = 0$, то можно записать два независимых уравнения Шредингера для двух компонент волновой функции, а соответствующие гамильтонианы имеют вид:

$$H_\pm \cong \frac{Q^2}{2C} + E_J(1\pm\lambda)\frac{\theta^2}{2} - E_J\left(1\pm\frac{\lambda}{4}\right)\frac{\theta^4}{4!} - \frac{\hbar^2}{2e} I(t)\theta$$

Бифуркационный джозефсоновский осциллятор

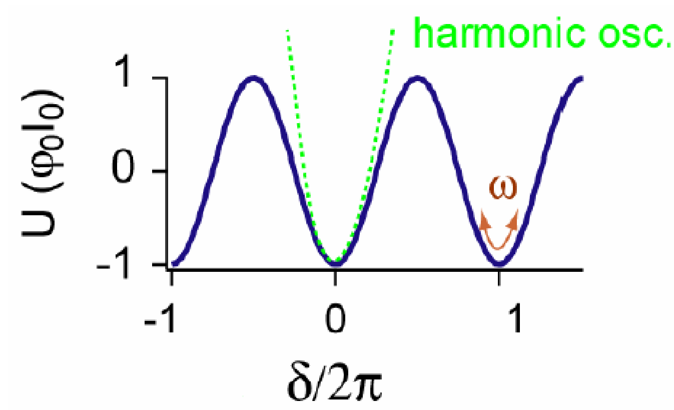
I.Siddiqi *et al*., Phys. Rev. Lett. 93, 207002 (2004); I. Siddiqi, *et al*. Phys. Rev. B 73, 054510 (2006).



нелинейность

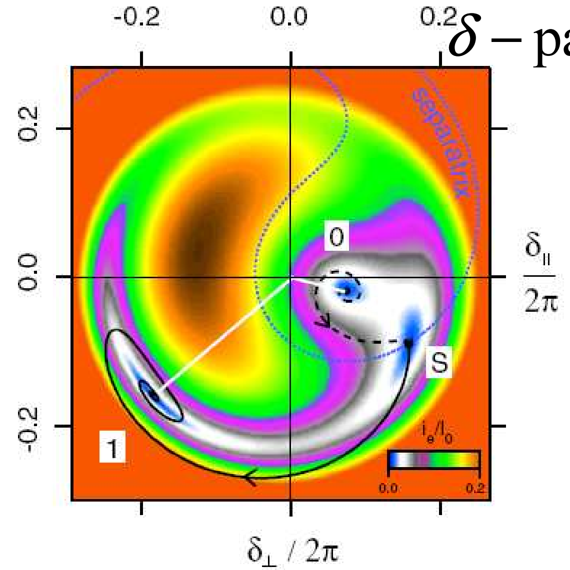
$$I_0 \sin\delta(t)$$

$$\varphi_0^2 C_J \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{\varphi_0^2}{R}\frac{d\delta}{dt} + \varphi_0 I_0\left(\delta - \frac{\delta^3}{6}\right) - \varphi_0 I_{RF}\sin(\omega t) = 0$$

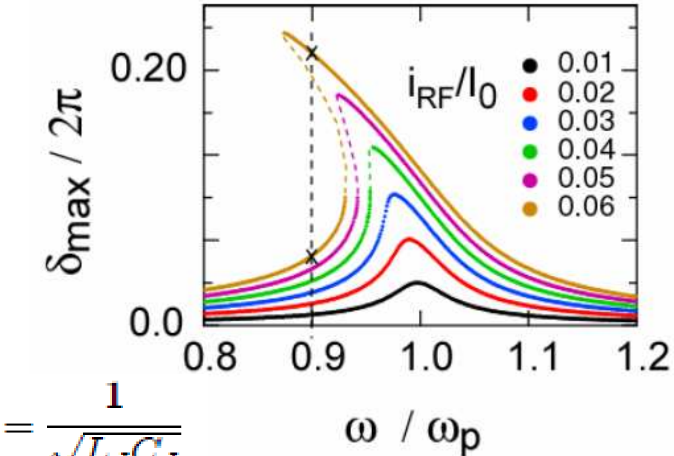


δ – разность фаз на переходе

два состояния : большая и малая ампл. колеб.

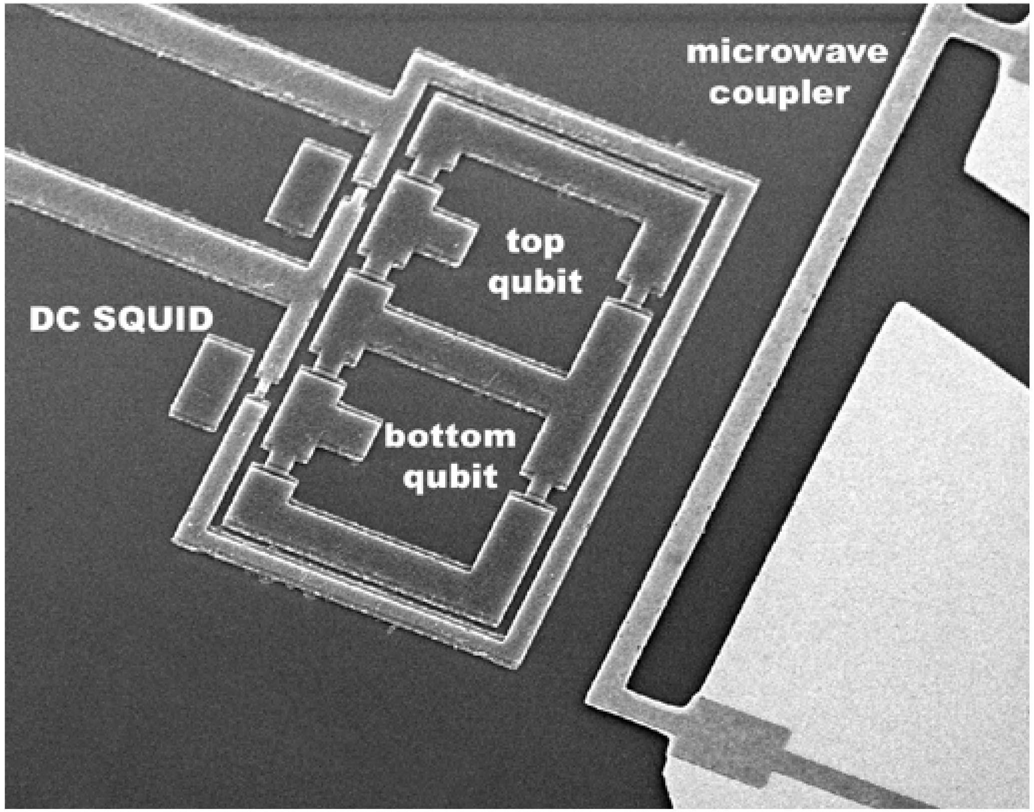


Фазовый портрет нелинейного осциллятора во внешнем поле.



$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_J C_J}}$$

Coupled Qubits

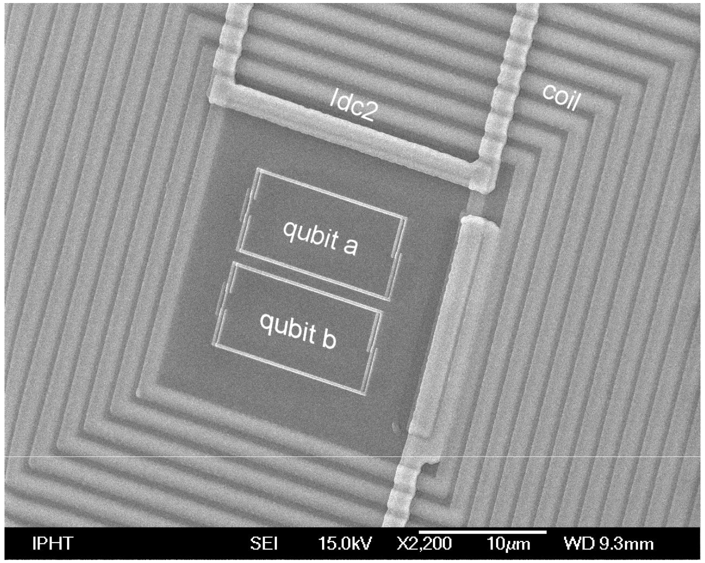


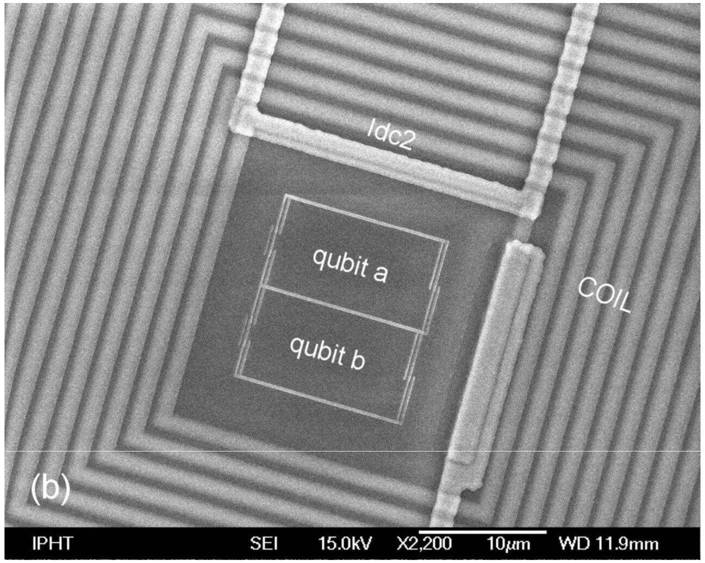
Hannes Majer
Floor Pauw
Alexander ter Haar

Coupled Qubits. Micrographs

1. Weak inductive coupling

J=20 mK



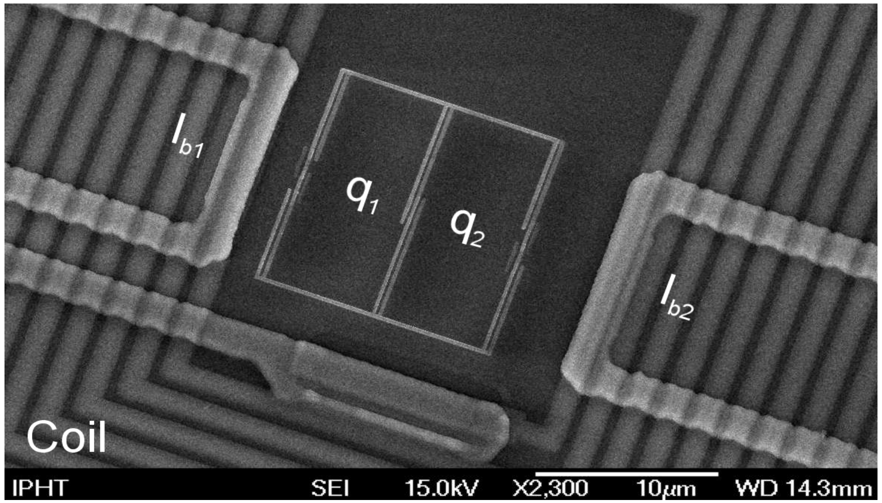


2. Strong inductive coupling

J=150 mK

3. Coupling through a shared Josephson junction

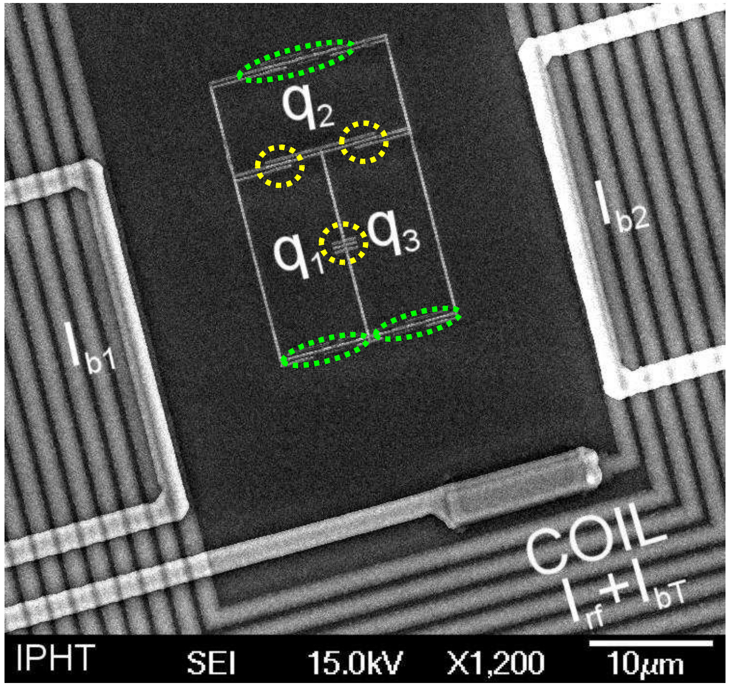
J=690 mK



A. Izmalkov et al., PRL 93, 037003 (2004)

M. Grajcar, *et al.*, PRB 72, R020503, (2005).

Three flux qubits coupled by Josephson junctions



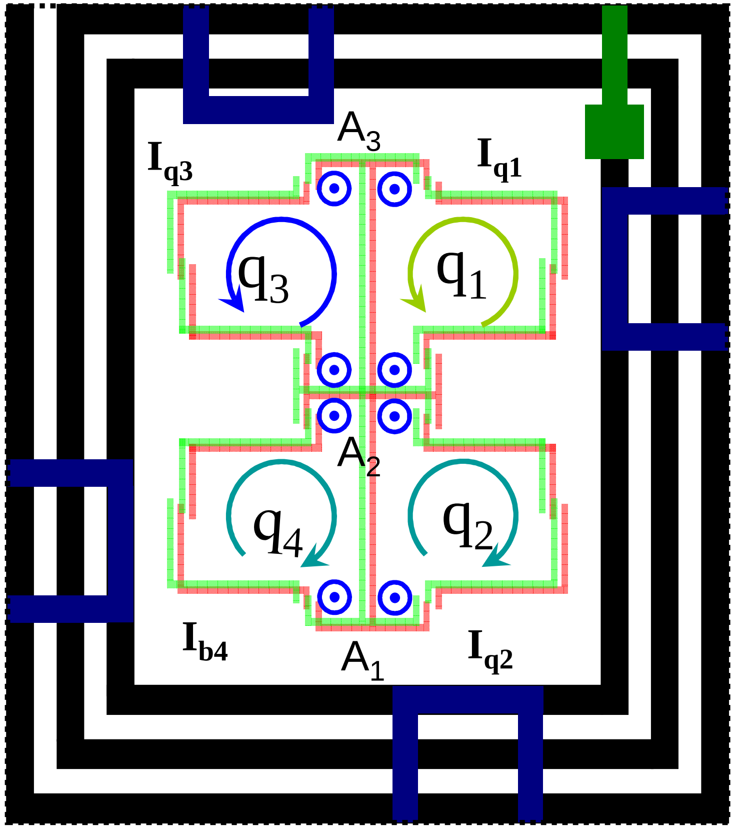
Sample parameters were reconstructed from measurements:

$J_{12}=J_{13}=J_{23}=0.61$ K,
$\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=70$ mK,
$I_{p1}=I_{p2}=115$ nA, $I_{p3}=125$ nA

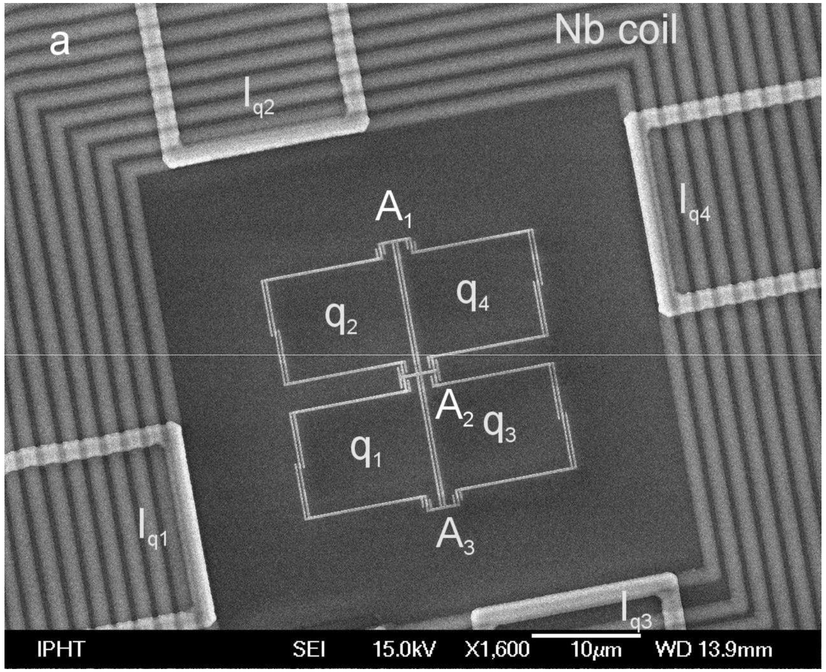
A. Izmalkov *et al.,* EPL, **76**, 533, (2006)

Four qubit sample

Layou



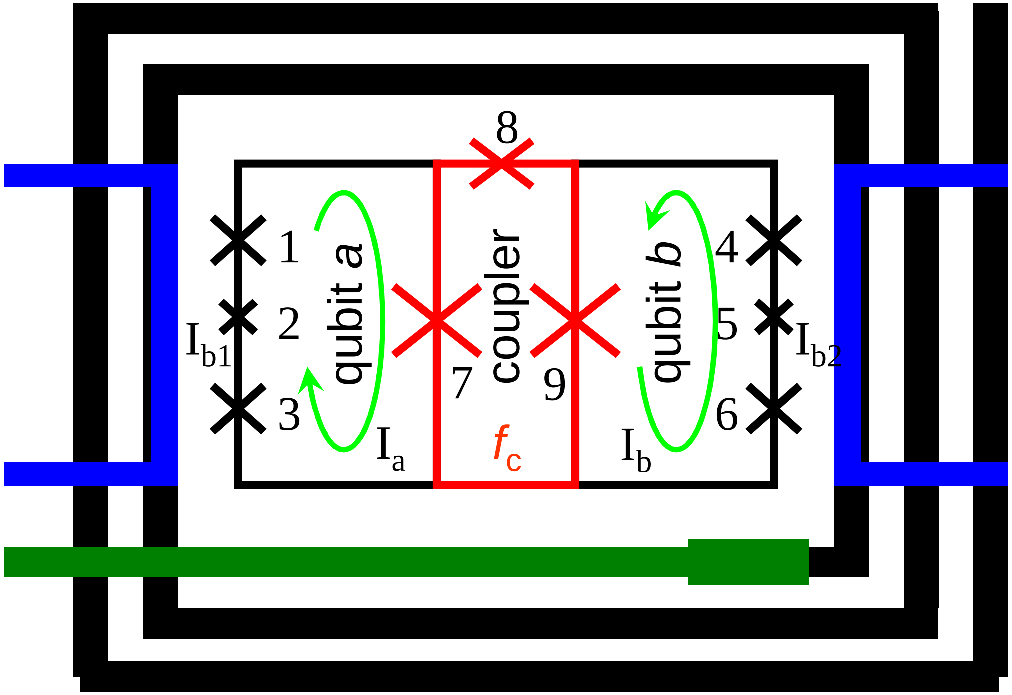
Micrograph



$$H = -\sum_{i=1}^{4}[\epsilon_i \sigma_z^{(i)} + \Delta_i \sigma_x^{(i)}] + \sum_{1\le i<j\le 4} J_{ij}\sigma_z^{(i)}\sigma_z^{(j)},$$

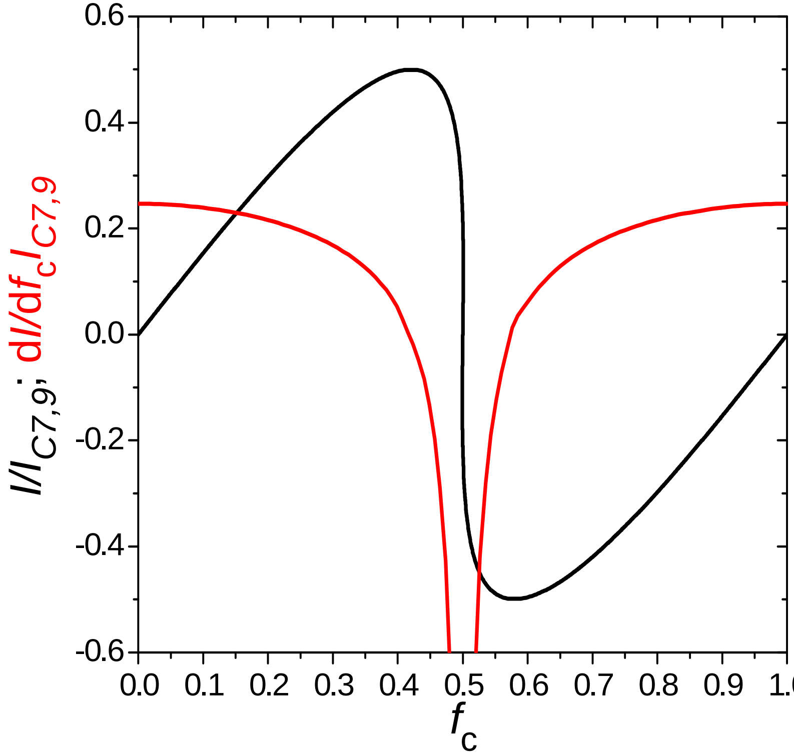
Tunable coupling

Layout



$E_8/E_{7,9}=1/2$, $E_{2,5}/E_{1,3,4,6}=0.75$, $E_1/E_7=7/20$

Coupler current-flux relation



Interaction strength

$$\boxed{J(f_c)=\frac{1}{2e}\frac{I_C'(f_C)}{I_7^2-I_C^2(f_C)}I_aI_b}$$

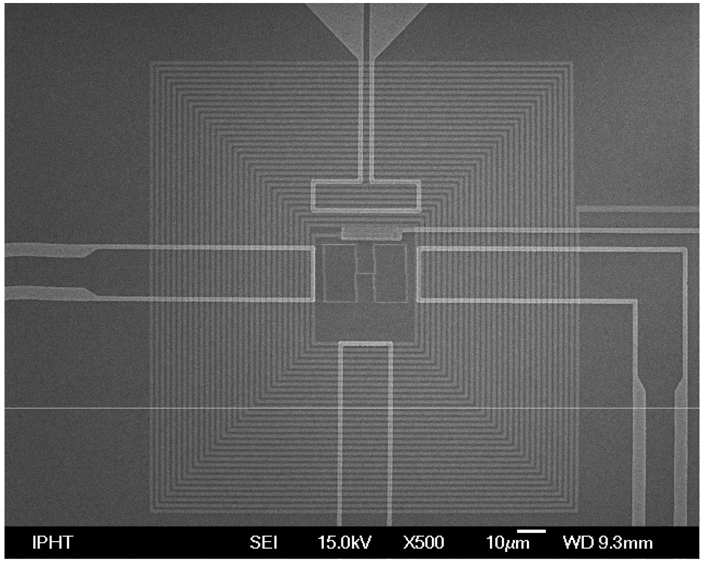
S. H.W. van der Ploeg *et al.*, PRL **98**, 057004 (2007)

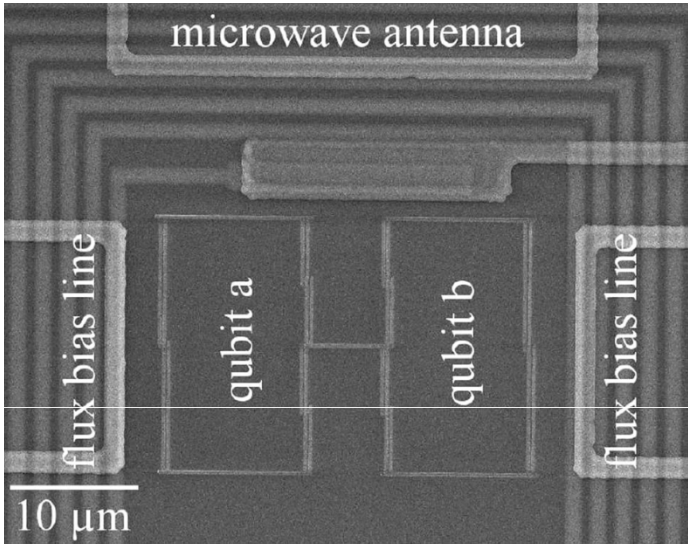
Амплитудная спектроскопия джозефсоновских кубитов

- Джозефсоновские кубиты
- Амплитудная спектроскопия
- Динамика системы
- Переходы Ландау – Зинера
- Квазиэнергетический подход
- Интерференционные картины для переходов
- Выводы

М.В.Денисенко, <u>А.М.Сатанин</u>
ННГУ им. Н.И.Лобачевского (Национальный исследовательский университет),
S. Ashhab and F. Nori, ***Advanced Science Institute, (RIKEN), Japan***

Связанные кубиты





Два связанных кубита

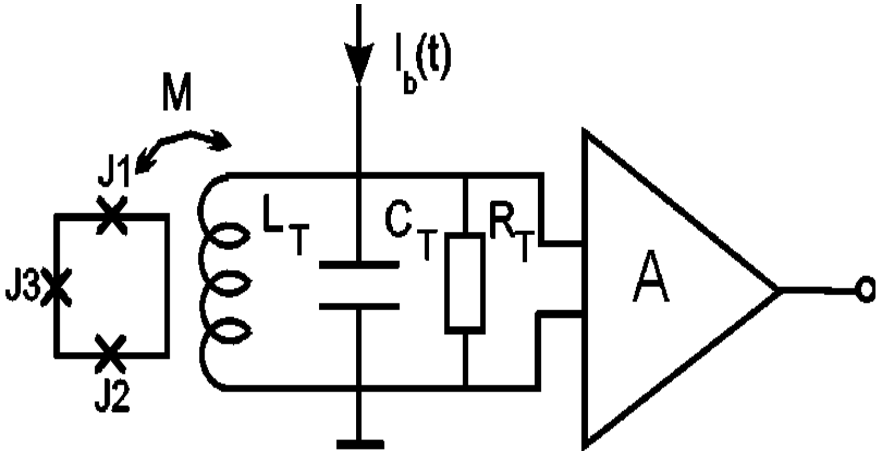


Схема для измерений

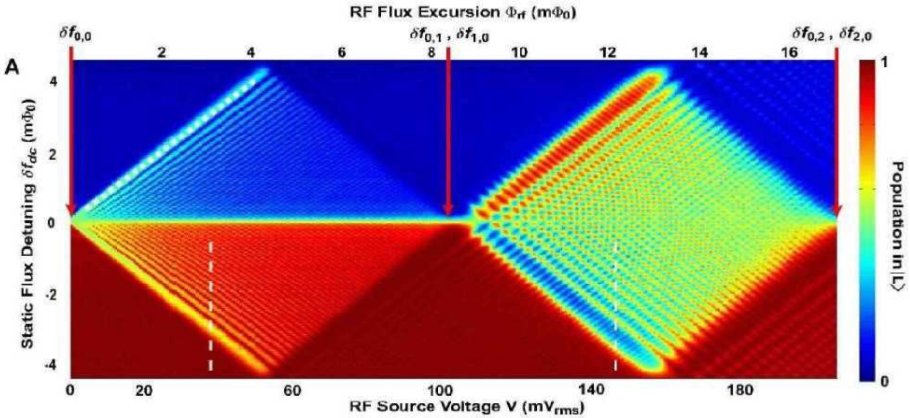
A. Izmalkov *et al*., Phys. Rev. Lett. **93**, 037003 (2004);
M. Grajcar M. *et al*., Phys. Rev. B **72**, 020503 (2005);
A. Izmalkov, M. Grajcar, E. Il`ichev, Phys. Rev. Lett. **101**, 017003 (2008).

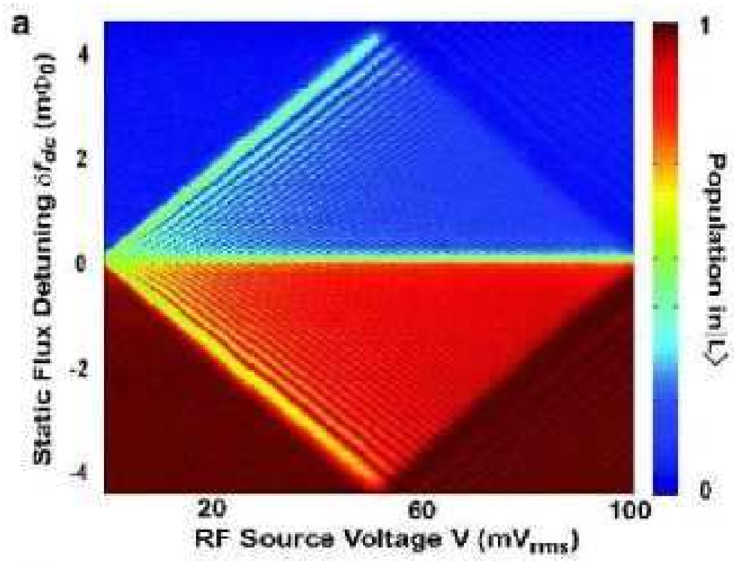
Амплитудная спектроскопия

- M. Sillanpa *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96,** 187002 (2006).
- D.Berns *et al*., Nature, **455**, 51 (2008).
- M.S. Rudner, A.V. Shytov, L.S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **101**,
190502 (2008).

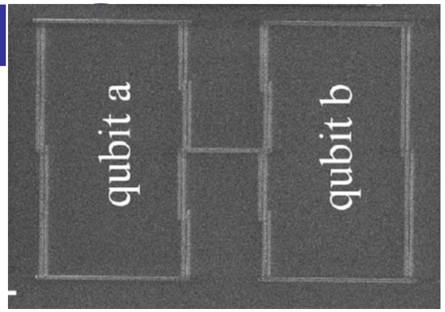
Идея: получение информации путем «развертки» функции отклика по амплитуде сигнала

Главное достоинство: система исследуется в широких диапазонах изменения амплитуды при любых частотах





Два связанных куби



Гамильтониан взаимодействующих кубитов:

$$\boxed{H=-\frac{1}{2}\left(\in_1\sigma_z^{(1)}+\Delta_1\sigma_x^{(1)}\right)\otimes I-\frac{1}{2}I\otimes\left(\in_2\sigma_z^{(2)}+\Delta_2\sigma_x^{(2)}\right)-\frac{J}{2}\sigma_z^{(1)}\otimes\sigma_z^{(2)}}$$

$$H=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\in_1+\in_2+J & \Delta_2 & \Delta_1 & 0\\ \Delta_2 & \in_1-\in_2-J & 0 & \Delta_1\\ \Delta_1 & 0 & -\in_1+\in_2-J & \Delta_2\\ 0 & \Delta_1 & \Delta_2 & -(\in_1+\in_2)+J\end{pmatrix}$$

$$\in_i=\in_i^c\left(f_i-\frac{1}{2}\right)\qquad \in^c{}_i=2\,|I_i|\,\Phi_0$$

$$f_i=\Phi_{xi}/\Phi_0\qquad \frac{|J|}{2}=M_{12}I_1I_2$$

Идентичные кубиты:

$$\in=\in_1=\in_2\qquad \Delta=\Delta_1=\Delta_2$$

$$\Rightarrow\quad \tilde{H}_{st}=U_{st}^{+}HU_{st}$$

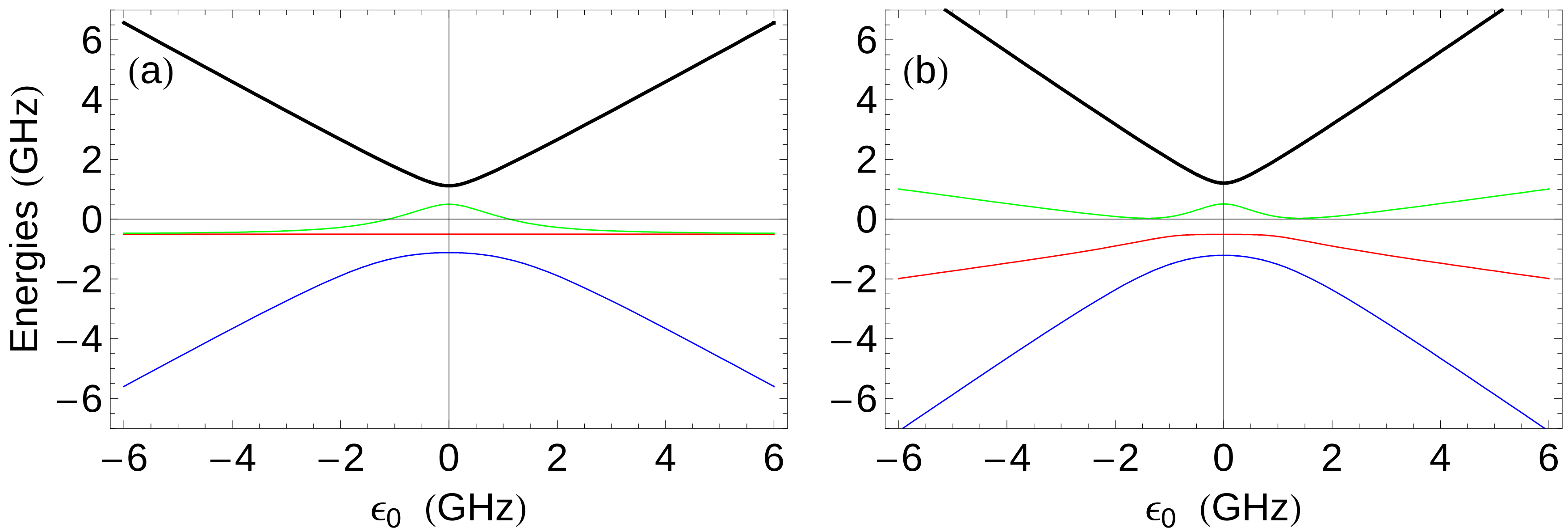
$$U_{st}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

синглет-триплетное представление

$$\tilde{H}_{st}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\in+J & \sqrt{2}\Delta & 0 & 0\\ \sqrt{2}\Delta & -J & \sqrt{2}\Delta & 0\\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\in+J & 0\\ 0 & 0 & 0 & -J\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{H_{st}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\in+J & \sqrt{2}\Delta & 0\\ \sqrt{2}\Delta & -J & \sqrt{2}\Delta\\ 0 & \sqrt{2}\Delta & -2\in+J\end{pmatrix}}$$

Дисперсионный анализ



1) Идентичные кубиты

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$$

$$\Delta = 1 \ \ GHz \qquad J = 1 \ GHz$$

2) Различные связанные кубиты

$$\Delta_2 = 1.2\Delta_1 \qquad \epsilon_2^c = 1.5\epsilon_1^c$$

$$J = 1 \ \ GHz$$

Динамика системы

Переменное внешнее поле:

Симметричные кубиты $\in(t) = \in_0 + A\cos\omega t$

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)> = H(t)|\Psi(t)>}$$

$$|\Psi> = U_{st}(t)|\overline{\Psi}(t)>$$, где $$U_{st}(t) = e^{iS_{st}(t)}$$

$$S_{st}(t) = \left(\in_0 t + \frac{A}{\omega}\sin(\omega t)\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t \cdot J}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Динамика несимметричных кубитов

Несимметричные кубиты

$$\in_1(t) = \in_0^1 + A_1 \cos \omega_1 t,$$
$$\in_2(t) = \in_0^2 + A_2 \cos \omega_2 t.$$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \omega}$$

Каноническое преобразование:

$$U(t) = e^{iS(t)}$$

$$S(t) = \phi_1(t)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} + \phi_2(t)\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} + J\,t\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\phi_{1,2}(t) = \in_0^{1,2} t + \frac{A_{1,2}}{\omega} \sin \omega t$$

Резонансные условия для несимметричных кубитов

$$\boxed{\in_0^1 \pm J + n\omega \approx 0}$$

$$\boxed{\in_0^2 \pm J + n\omega \approx 0}$$

Population trapping населенностей контролироваться двумя условиями:

$$J_n\left(\frac{A_1}{\omega}\right) = 0 \qquad J_n\left(\frac{A_2}{\omega}\right) = 0$$

Численные расчёты динамики кубитов

Симметричные кубиты

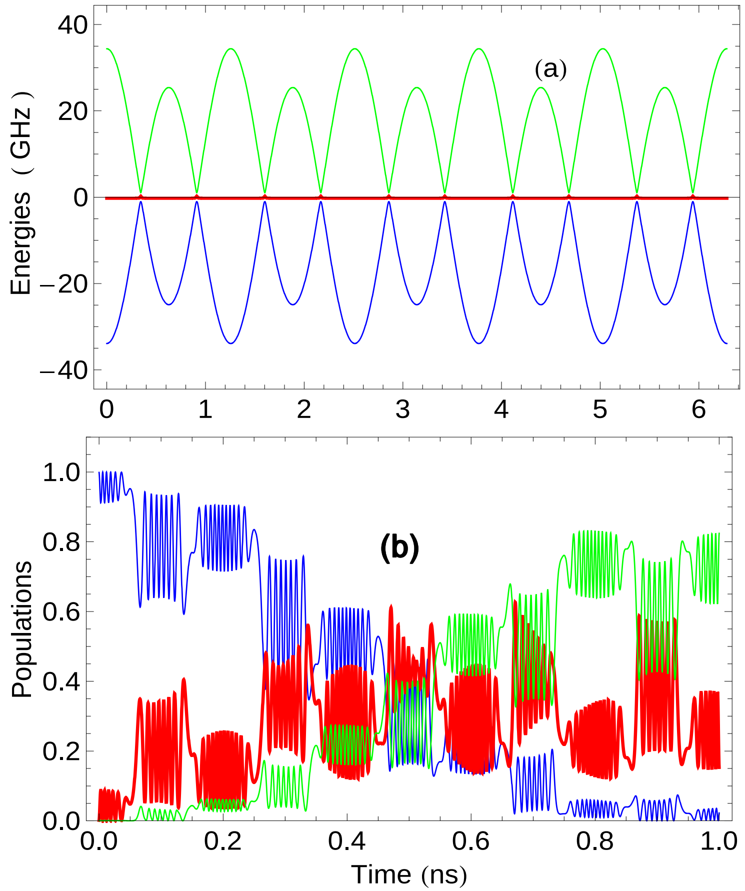
$$\left|\Psi(t+dt)\right\rangle = \left(\frac{I - iH(t+\frac{dt}{2})\frac{dt}{2}}{I + iH(t+\frac{dt}{2})\frac{dt}{2}} \right) \left|\Psi(t)\right\rangle + O\left((Hdt)^3\right)$$

Схема Кэли

Параметры кубитов:

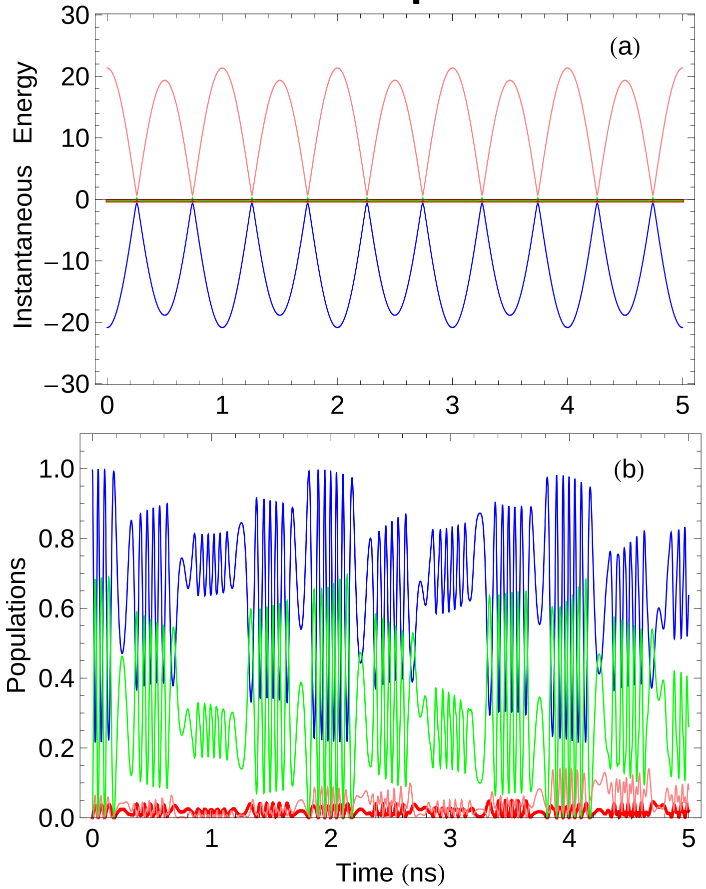
$A = 21.21\omega$

$J = 2 \quad GHz,$



Динамика несимметричных кубитов

Несимметричные



Параметры кубитов:

$J = 2\ \ GHz, \omega = 1\ \ GHz,\ A_1 = A_2 = 8.65\,\omega$

РЕЗУЛЬТАТЫ:

1) Амплитуды испытывает быстрые осцилляции вокруг среднего значения, испытывая резкие перебросы между состояниями *нелинейного резонанса* в те моменты времени, когда зоны максимально сближаются;

2) Заселение уровней также осциллирует на высокой амплитуде около некоторых средних значений, и происходят перебросы, согласно теории Ландау-Зинера.

3) «Скачки» вероятностей заселенности уровней происходят, когда щель минимальна, в интервалах между скачками населенности уровней осциллируют медленно.

Квазиэнергия и вероятности заселенностей уровней в сильном поле

Гамильтониан системы: $H(t) = H(t+T)$

Флоке - базис: $|\Psi_k(t)> = |\Phi_k(t)> e^{-i\varepsilon_k t}, \quad |\Phi_k(t+T)> = |\Phi_k(t)>$

ε_k - квазиэнергия

Уравнения для квазиэнергии и Квазиэнергетических функций:

$$U(T)|\Phi_k(0)> = e^{-i\varepsilon_k t}|\Phi_k(0)>,$$

$$U(T) = P\exp(-i\int_0^T H(t)dt)$$

⇒ нашли ε_k и $|\Phi_k(0)>$

Эволюция системы: $(H(t) - i\frac{\partial}{\partial t})|\Phi_k(t)> = \varepsilon_k |\Phi_k(t)>$

⇒ находим $|\Phi_k(t)>$

S.H. Autler, C.H. Townes, Phys. Rev. **100**, 703 (1955).

Зельдович, ЖЭТФ (1965), Ритус, ЖЭТФ (1965).

Вероятности переходов в сильном поле

Пусть система в t=0 находилась в состоянии $\left|\alpha\right\rangle$

Возбужденное состояние $\left|\beta\right\rangle$

Вероятность перехода

$$P_{|\alpha>\to|\beta>}(t,\,t_0) = \sum_{k,\,l} e^{-i(\varepsilon_k-\varepsilon_l)(t-t_0)} \sum_n M_k^{(n)}(t) M_l^{*(n)}(t)$$

$$M_k^{(n)}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega\tau} < \beta\,|\,\Phi_k(\tau)><\Phi_k(\tau+t)\,|\,\alpha > d\tau$$

В силу периодичности вероятности разложим по гармоникам:

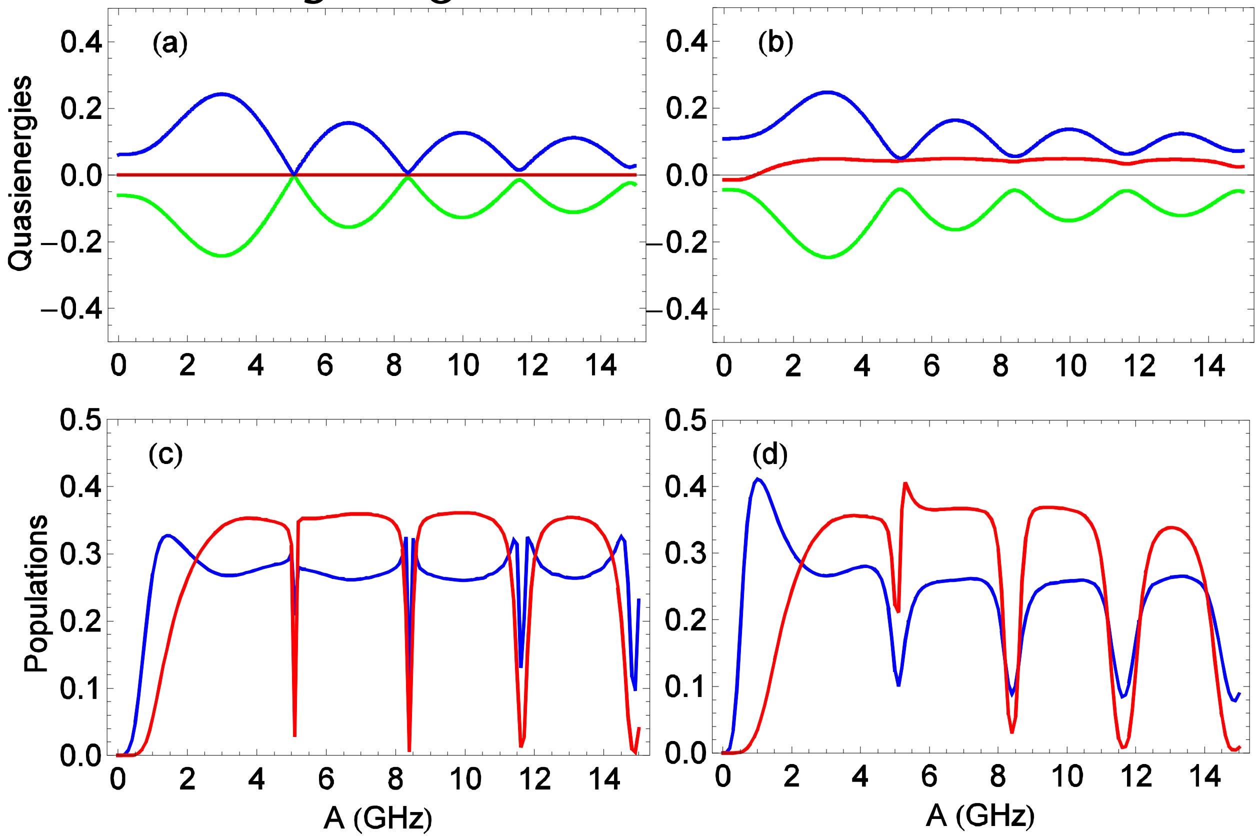
$$\boxed{\overline{P}_{\alpha\to\beta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P^{(n)}_{\alpha\to\beta}, \quad P^{(n)}_{\alpha\to\beta} = \sum_k \left| < \beta\,|\,\Phi_k^{(n)} >< \Phi_k(0)\,|\,\alpha > \right|^2,}$$

$$\left|\Phi_k^{(n)}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{in\omega t}\left|\Phi_k(t)\right\rangle dt$$

Фурье - компонента квазиэнергетической функции.

Расчёты: симметричные кубиты

$J = 0$ $\qquad\qquad$ $J = -0.1\ GHz$

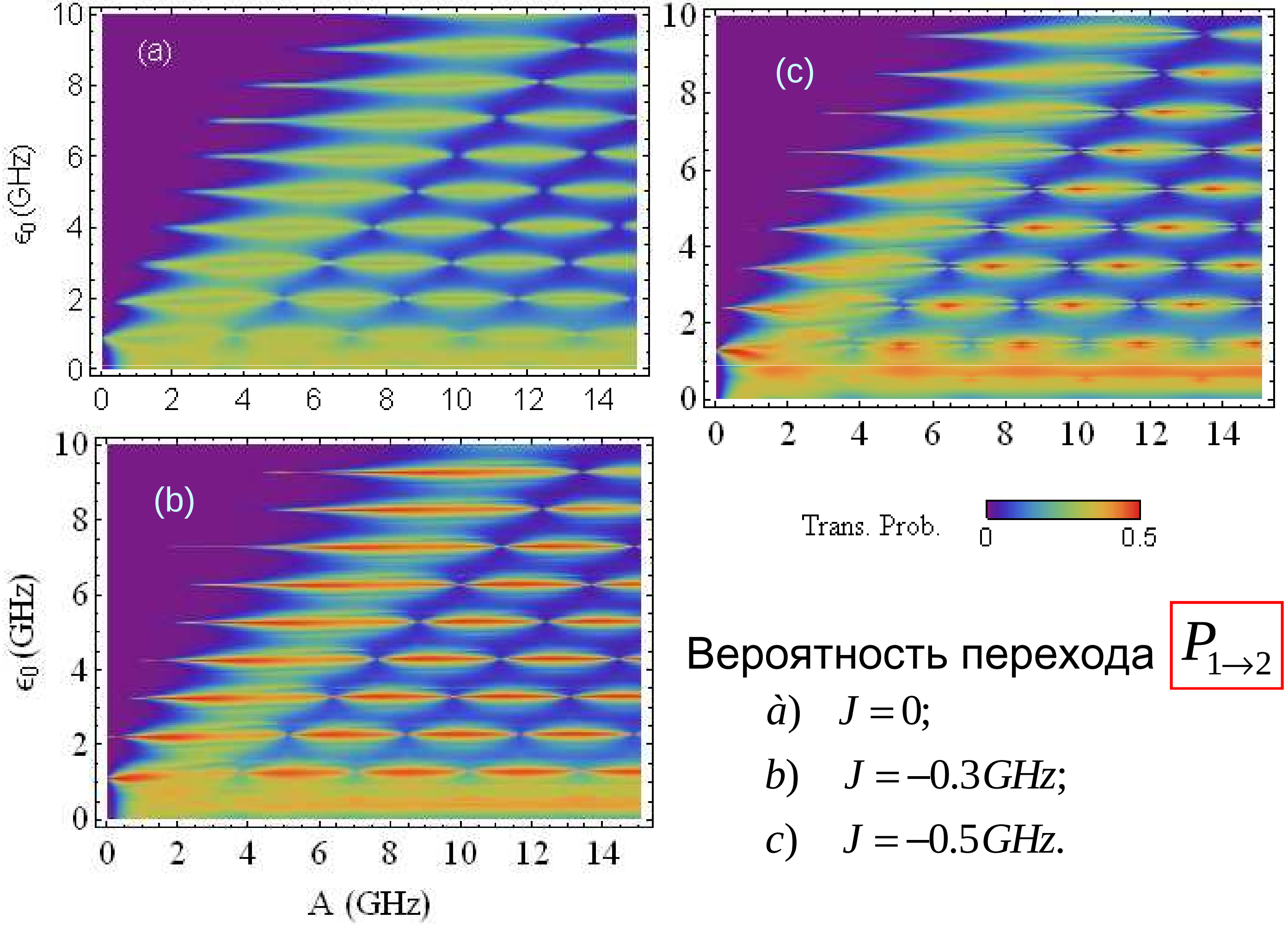


$\in_0 = 2\ GHz$

$P_{1\to 2}$

$P_{1\to 3}$

$$\boxed{P_{1\to 2}}$$



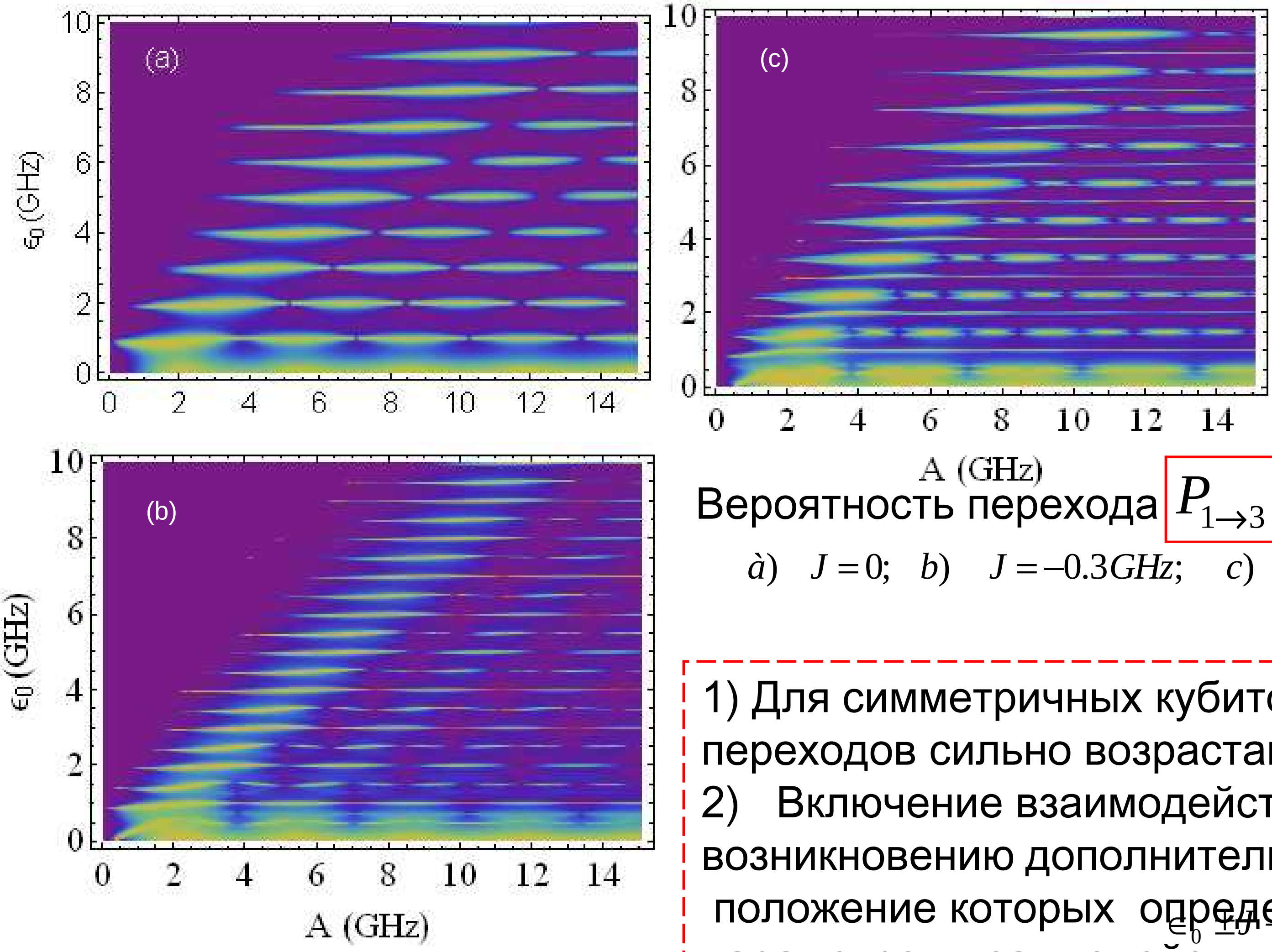
Вероятность перехода $\boxed{P_{1\to 2}}$ при $\Delta = 0.5\ GHz$

à) $J = 0;$

$b)$ $J = -0.3GHz;$

$c)$ $J = -0.5GHz.$

$P_{1\to3}$



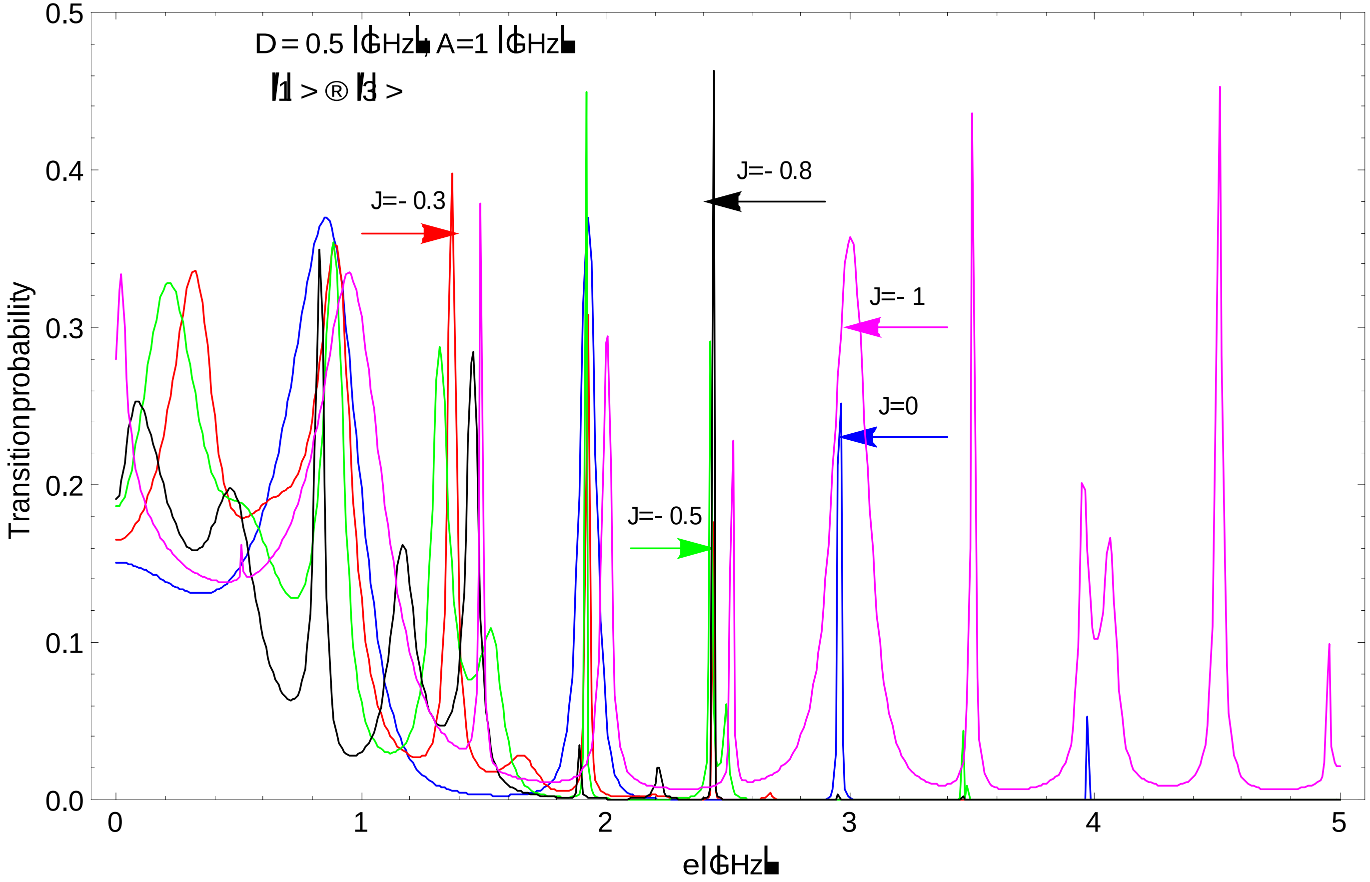
Вероятность перехода $\boxed{P_{1\to3}}$ при $\Delta = 0.5\ GHz$

à) $J = 0$; b) $J = -0.3GHz$; c) $J = -0.5GHz$.

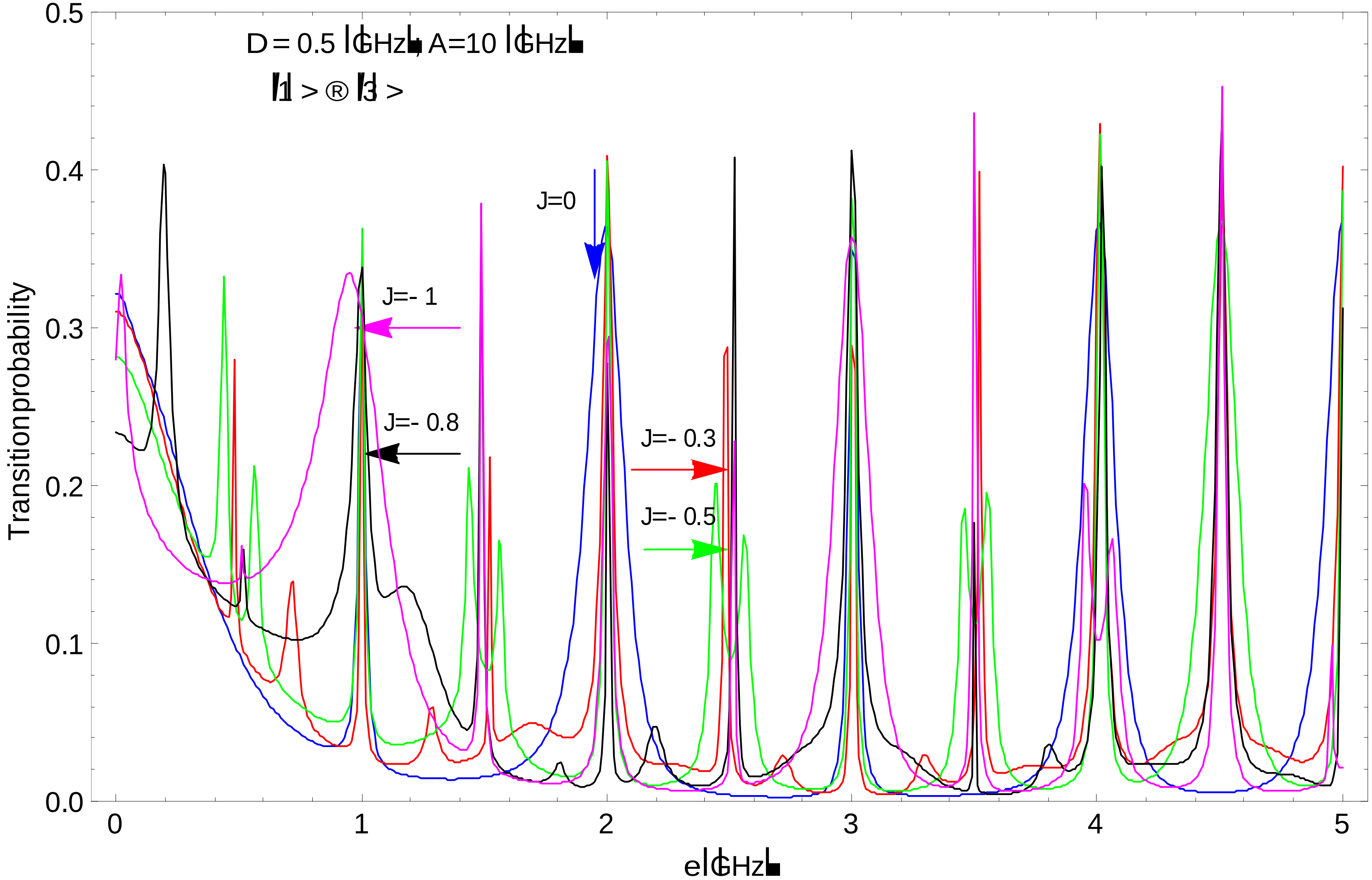
1) Для симметричных кубитов вероятности переходов сильно возрастают при
2) Включение взаимодействия приводит к возникновению дополнительных пиков, положение которых определяется $\epsilon_0 \pm J + n\omega \approx 0$ параметром взаимодействия.

Многофотонные резонансы:

A= 1 GHz, |1> - > |3>



Многофотонные резонансы:
A= 10 GHz, |1> - > |3>

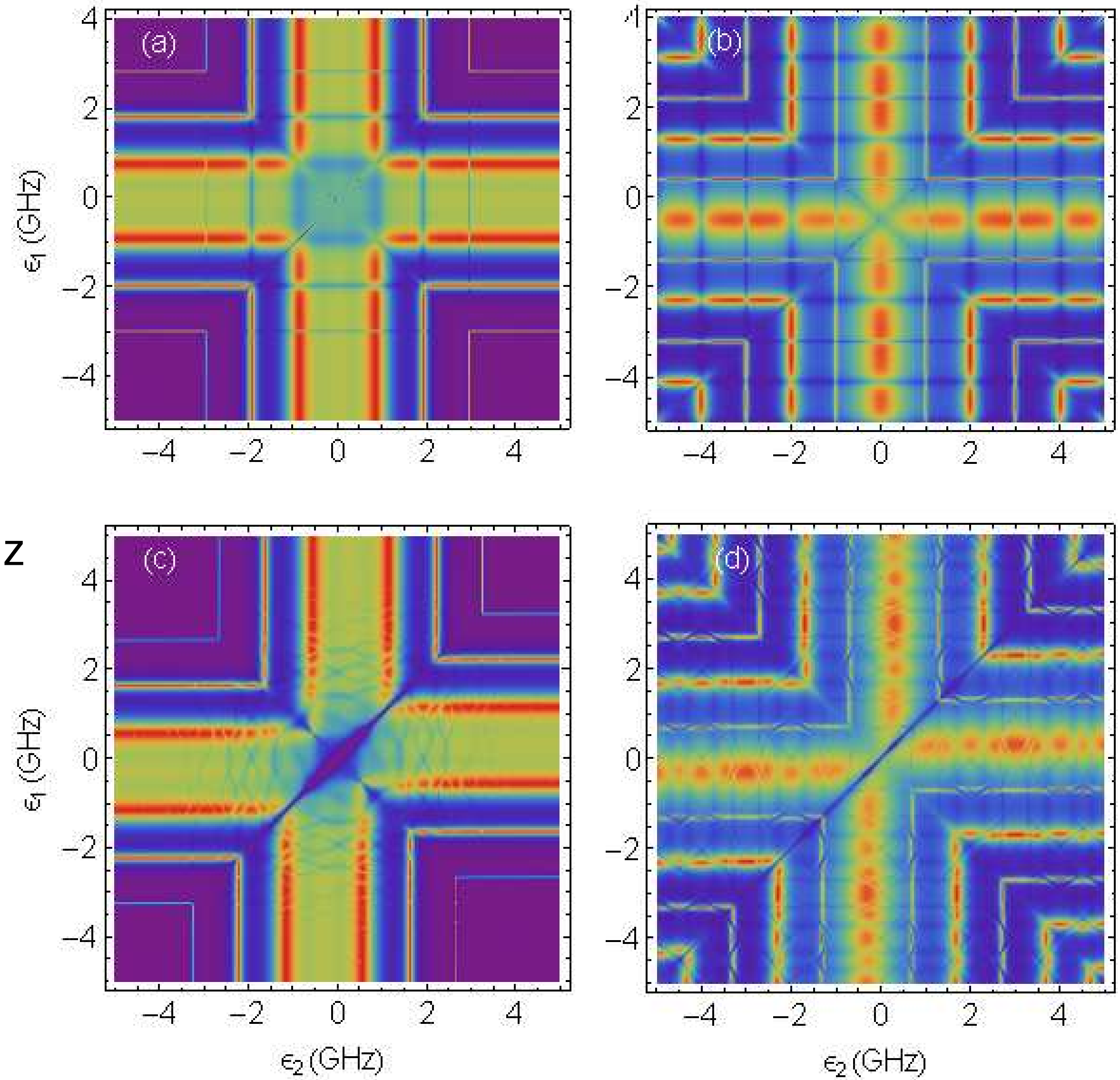


$P_{1\to 2}$

A = 1 GHz   A = 10 GHz

J = 0

J = - 0.3 GHz



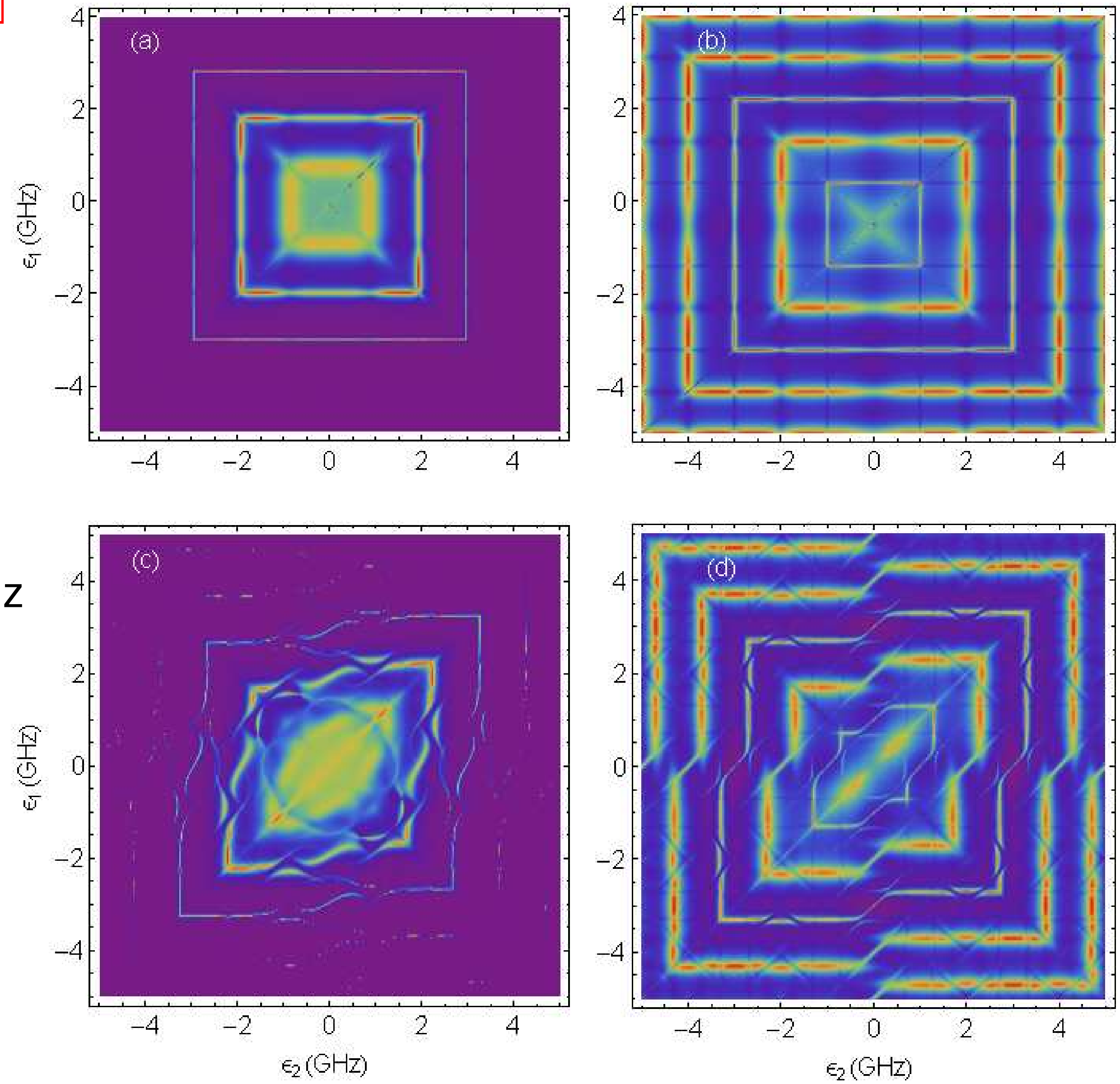
$\boxed{P_{1\to3}}$

A = 1 GHz

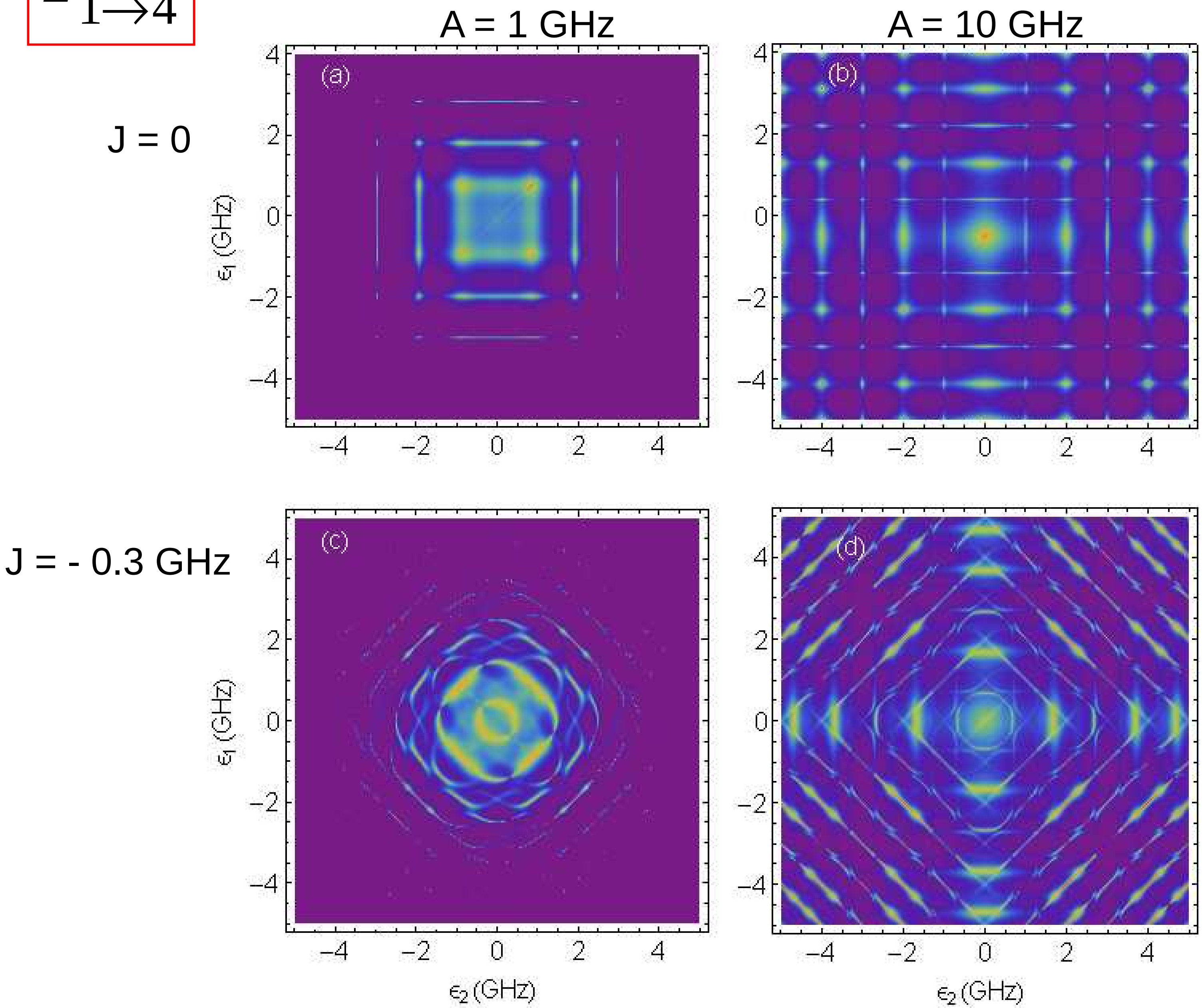
A = 10 GHz

J = 0

J = - 0.3 GHz



$P_{1\to 4}$



Основные выводы

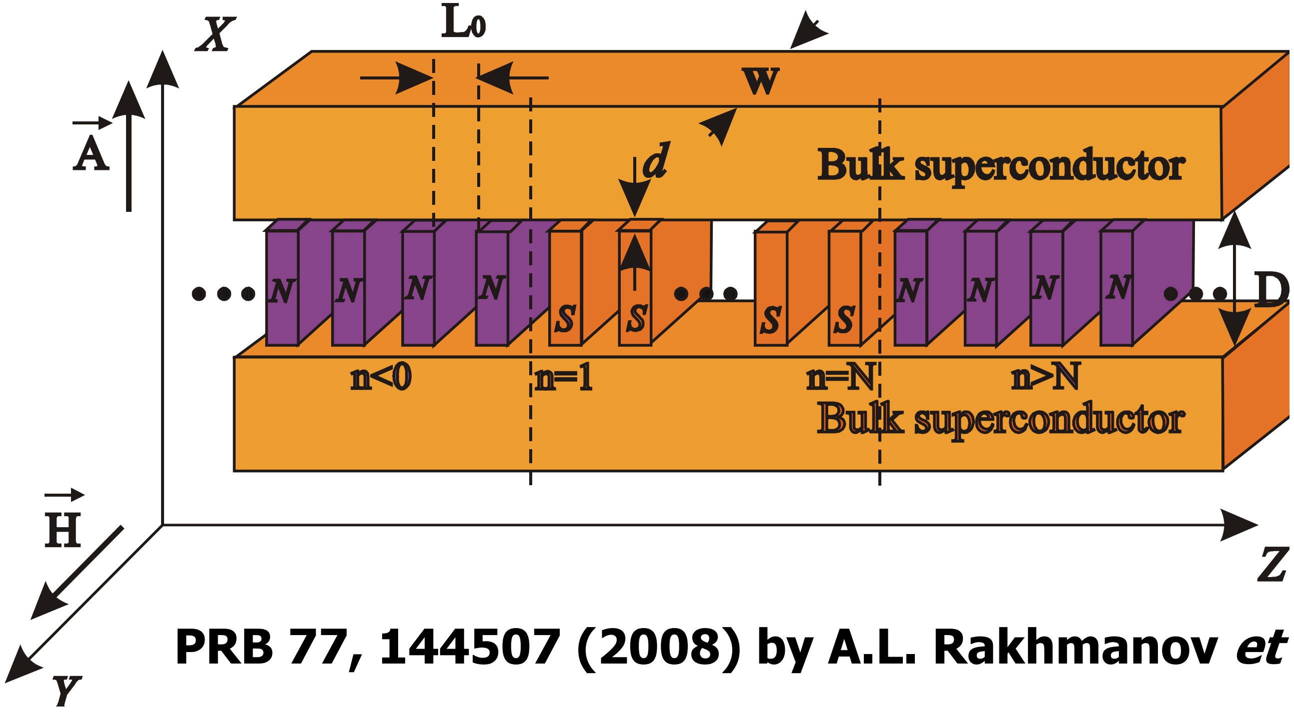
- Методом RWA получены резонансные условия, определяющие условия возникновения пиков для вероятностей перехода связанных кубитов;
- Населенности уровней кубитов в сильном поле быстро осциллируют, испытывая резкие перебросы в те моменты времени, когда зоны максимально сближаются (переходы Ландау-Зинера);
- Параметр взаимодействия кубитов определяет дополнительное расщепление резонансов и интерференционную картину для вероятностей переходов;
- Численное моделирование воздействия сильного поля на систему кубитов подтверждает качественную картину, полученную в приближении RWA.

Электродинамические свойства квантовых метаматериалов

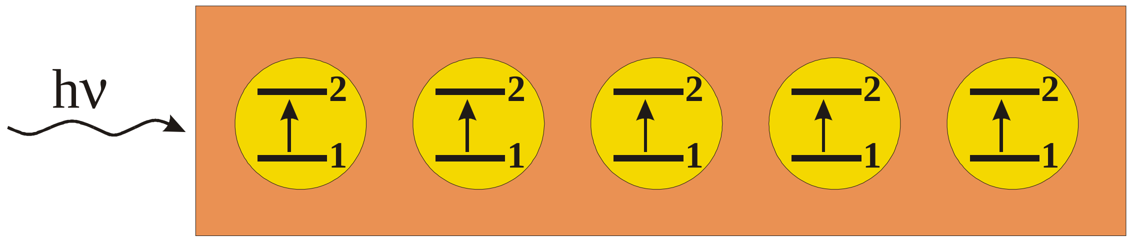
•Модель волноводной структуры
•Квантовый фотонный кристалл
•Анализ квантового состояния волноводной линии при помощи слабых импульсов
•Бистабильность коэффициента прохождения волны через волноводную структуру

Alexander Shvetsov, Arkady M. Satanin, Alexander Gelman, Alexandre Zagoskin, Sergey Savel'ev and Franco Nori, Preprin, 2011 (will be submitted to Phys.Rev.B)

Волноводная линия, содержащая джозефсоновские переходы



PRB 77, 144507 (2008) by A.L. Rakhmanov *et al*.

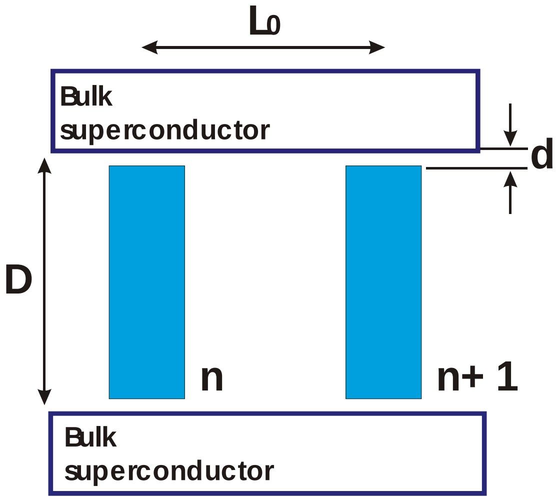


Модель и уравнения

Энергия пассивной (содержащей мостики из нормального металла) части волноводной линии

$$E_{NC} = \sum_{n\le 0, n>N} \left[\frac{Cd^2 \dot{A}_{xn}^2}{c^2} + \frac{DL_0 W \dot{A}_{xn}^2}{8\pi c^2} + \frac{DL_0 W}{8\pi} \left(\frac{A_{x,n+1} - A_{x,n}}{L_0} \right)^2 \right]$$

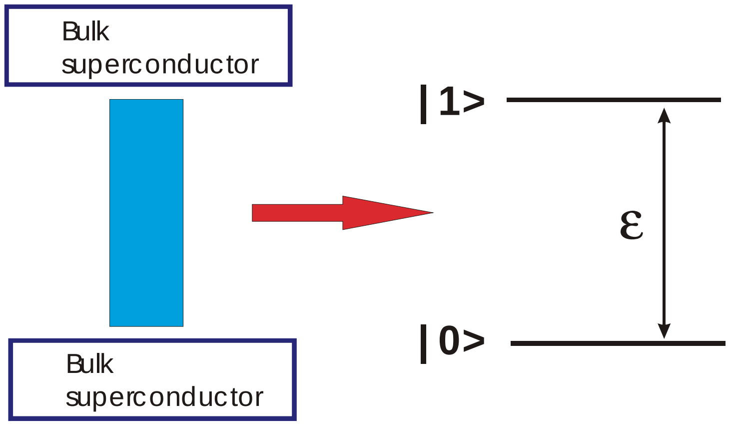
Энергия активной (содержащей джозефсоновские переходы) части волноводной линии



$$E_{SC} = \sum_{n=1}^{n=N} \left[\frac{E_J}{2\omega_J^2} \left(\left(\frac{2\pi d \dot{A}_{xn}}{\Phi_0} + \dot{\varphi}_n \right)^2 + \left(\frac{2\pi d \dot{A}_{xn}}{\Phi_0} - \dot{\varphi}_n \right)^2 \right) \right.$$
$$- E_J \left(\cos\left(\varphi_n + \frac{2\pi d A_{xn}}{\Phi_0} \right) + \cos\left(\varphi_n - \frac{2\pi d A_{xn}}{\Phi_0} \right) \right)$$
$$\left. + \frac{DL_0 W \dot{A}_{xn}^2}{8\pi c^2} + \frac{DL_0 W}{8\pi} \left(\frac{A_{x,n+1} - A_{x,n}}{L_0} \right)^2 + 2 I_n \varphi_n \right]$$

Квантовое описание джозефсоновских переходов

Лишь низколежащие возбуждения джозефсоновских переходов рассматриваются



Гамильтониан кубита с номером n:

$$\hat{H}_n = -\frac{E_J}{\omega_J^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_n}\right)^2 - 2(E_J\cos\varphi_n - I_n\varphi_n) + \hat{V}_n$$

$$\hat{V}_n = 2E_J(1-\cos a_n)\cos\varphi_n$$

$$a_n = 2\pi d A_{xn}/\Phi_0$$

Волновая функция:

$$\psi_n(t) = c_0(t)|0> \exp\left(i\varepsilon t/2\right) + c_1(t)|1> \exp\left(-i\varepsilon t/2\right)$$

$$i\hbar\dot{c}_\alpha(n,t) = \sum_{\beta=0,1} V_{n,\alpha\beta}(t)c_\beta(n,t), \;\; (\alpha,\beta) = 0,1$$

Уравнения для поля

Активная область:

$$\ddot{a}_n - \upsilon^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) + r \cdot \sin a_n < \psi_n | \cos \varphi_n | \psi_n >= 0$$

$$\upsilon^2 = \frac{DW\Phi_0^2}{32\pi^3 L_0 d^2 \left(\frac{E_J}{\omega_J^2} + \frac{D\Phi_0^2 L_0 W}{32\pi^3 c^2 d^2} \right)} \quad r = \frac{E_J}{\left(\frac{E_J}{\omega_J^2} + \frac{D\Phi_0^2 L_0 W}{32\pi^3 c^2 d^2} \right)}$$

Пассивная область:

$$\ddot{a}_n - \upsilon^2(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) = 0$$

Непрерывный предел

Поле достаточно слабое: $a_n << 1 \quad \sin a_n \approx a_n$

Волновое уравнение:

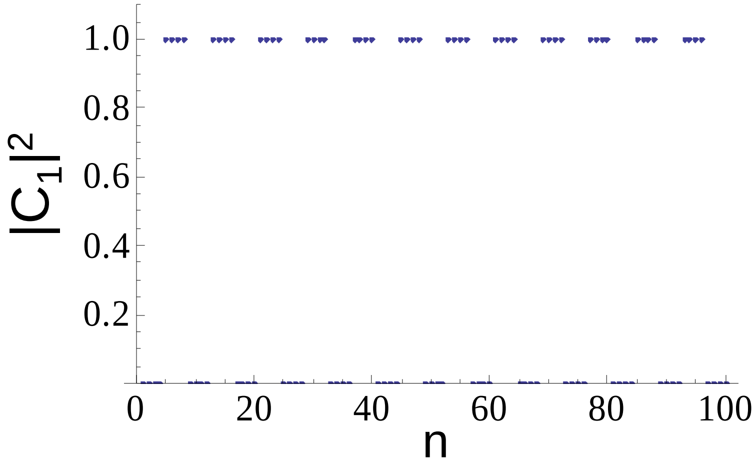
$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{\upsilon}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \chi(z,t) \cdot a$$

$$\tilde{\upsilon} = \upsilon L_0$$

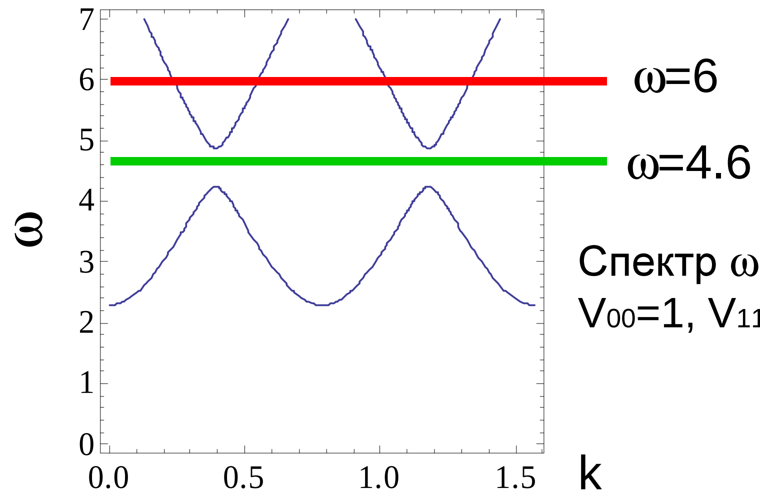
$$\chi(z,t) = -r < \psi(z,t)| \cos\varphi |\psi(z,t) >$$

Определяется квантовым состоянием кубитов в активной области

Квантовый фотонный кристалл

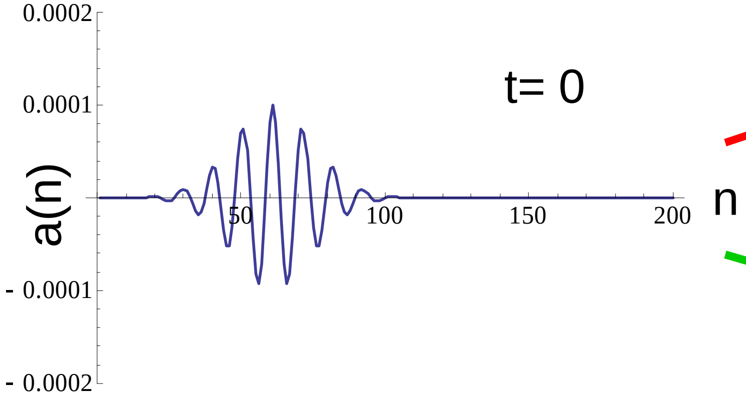


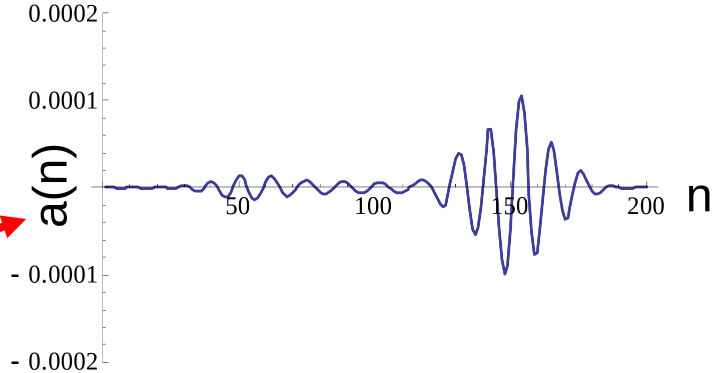
Начальное состояние
Период L=8



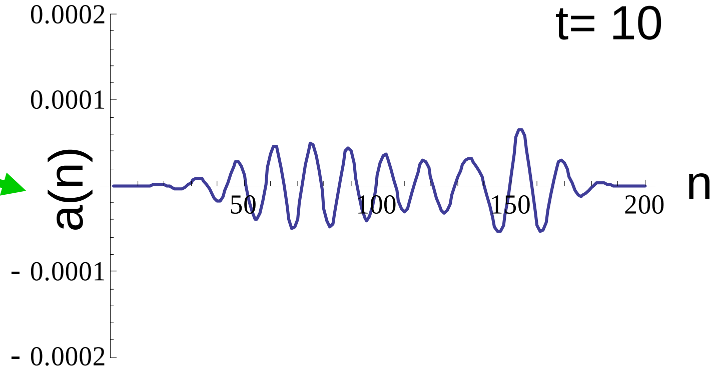
Спектр $\omega(k)$ для L=8, V_{00}=1, V_{11}=10.

Слабый сигнал
(не меняет состояния q-битов)





t= 10

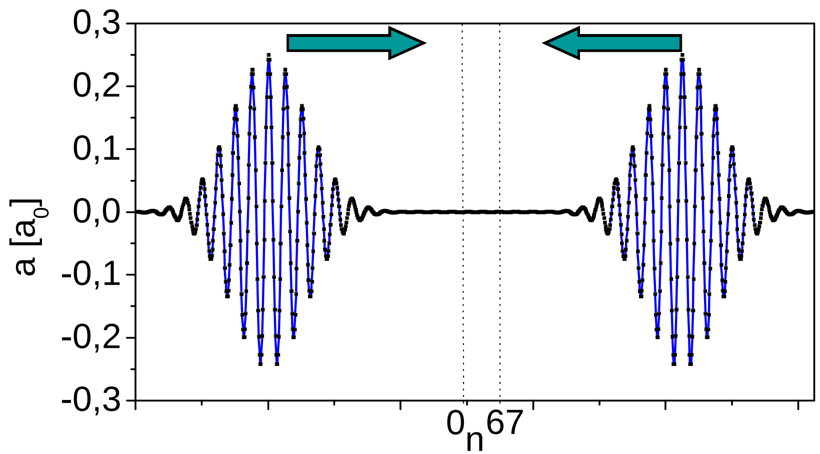


Параметры:
Скорость β=10, Длительность импульса l=20

Создание периодической населенности кубитов

Встречные импульсы:

Частота $\omega=\omega_J/2$,
скорость $\tilde{\upsilon}=c$,
ширина импульсов:
$l=80L_0$.



Резонансное приближение: $2\omega \approx \varepsilon \qquad \frac{2\pi\tilde{\upsilon}}{l} << \omega$

$$i\hbar\dot{c}_0(n,t) = a_n^2 d_{00}c_0 + a_n^2 d_{01}c_1 e^{-i\varepsilon t};$$

$$i\hbar\dot{c}_1(n,t) = a_n^2 d_{10}c_0 e^{i\varepsilon t} + a_n^2 d_{11}c_1$$

$$d_{\alpha\beta} = E_J < \alpha|\cos\varphi_n|\beta >$$

Населенность кубитов после прохождения импульсов

Поле, действующее на n-ый кубит:

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$$

$$a_n^{(1)}(t) = e^{-\frac{(z-vt)^2}{l^2}} \left(Ae^{i(kz-\omega t)} + A^* e^{-i(kz-\omega t)}\right)$$

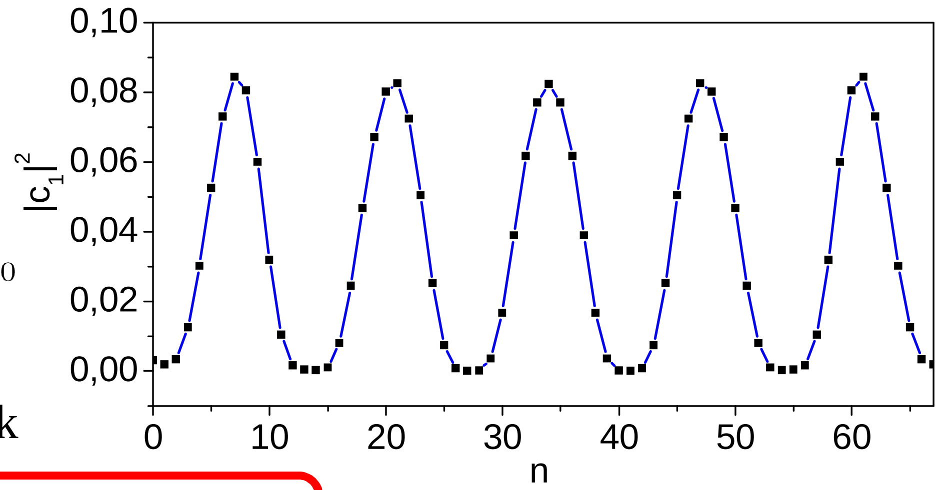
$$a_n^{(2)}(t) = e^{-\frac{(z+vt)^2}{l^2}} \left(Ae^{i(kz+\omega t+\phi_0)} + A^* e^{-i(kz+\omega t+\phi_0)}\right)$$

Вероятность возбуждения n-го кубита:

$$c_1(n', t) = \frac{-i\Omega}{\sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2/4}} \sin\left(\sqrt{|\Omega|^2 + \Delta^2/4}t\right) e^{-i\Delta t/2}$$

$$\Omega(z) = \frac{2d_{01}A^2}{\hbar} \left(\cos(2kz + \phi_0) + 1\right) e^{i\phi_0}$$

Периодическая функция с периодом π/k



Возможность контролировать период записи путем изменения длины волны импульсов

Закон дисперсии квантового фотонного кристалла

Лианеализованное уравнение:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{\upsilon}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\chi(z) a \quad \chi(z) = -\chi_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi z}{L_m}\right)\right)$$

Поиск решения в виде:

$$a_k(z,t) = u_k(z) \exp\left(i(kz - \omega t)\right) \quad u_k(z) = u_k(z + L_m)$$

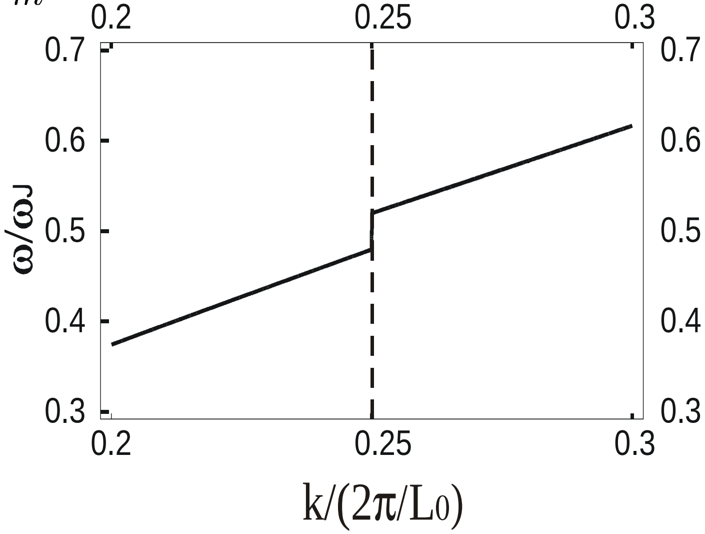
$$W_k = \frac{1}{L_m} \int_{-L_m/2}^{+L_m/2} \chi(z) \exp\left(i2kz\right), \;\; k = \frac{\pi n}{L_m}$$

$$\omega_k^2 - \upsilon^2 k^2 = \pm |W_k|$$

$$W_{k_n} = \chi_0 / 2$$

$$\delta\omega_n = \sqrt{\frac{\pi^2 \tilde{\upsilon}^2 n^2}{L_m^2} + |W_{k_n}|} - \sqrt{\frac{\pi^2 \tilde{\upsilon}^2 n^2}{L_m^2} - |W_{k_n}|} \approx$$

$$\approx \frac{L_m W_{k_n}}{\pi \tilde{\upsilon} n}, \;\; |W_{k_n}| << \frac{\pi^2 \tilde{\upsilon}^2 n^2}{L_m^2}$$



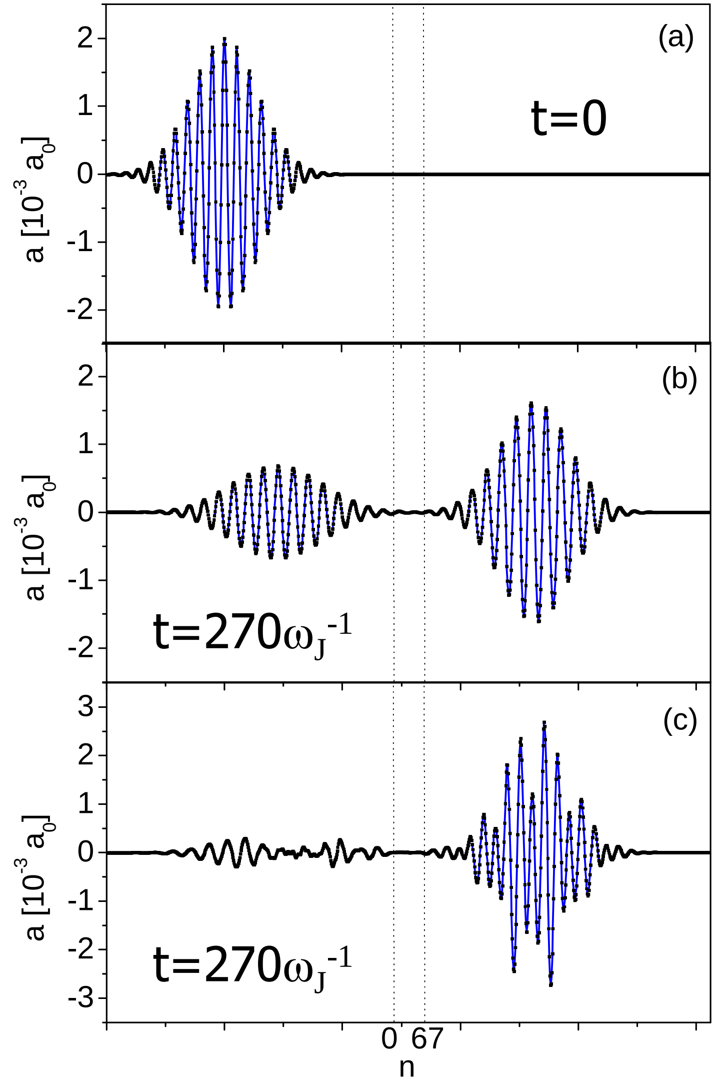
Ширина первой щели: $\boxed{\delta\omega_1 \approx \frac{L_m \chi_0}{2\pi \tilde{\upsilon}}}$

Распространение электромагнитных импульсов через волноводную линию с периодической модуляцией населенности кубитов

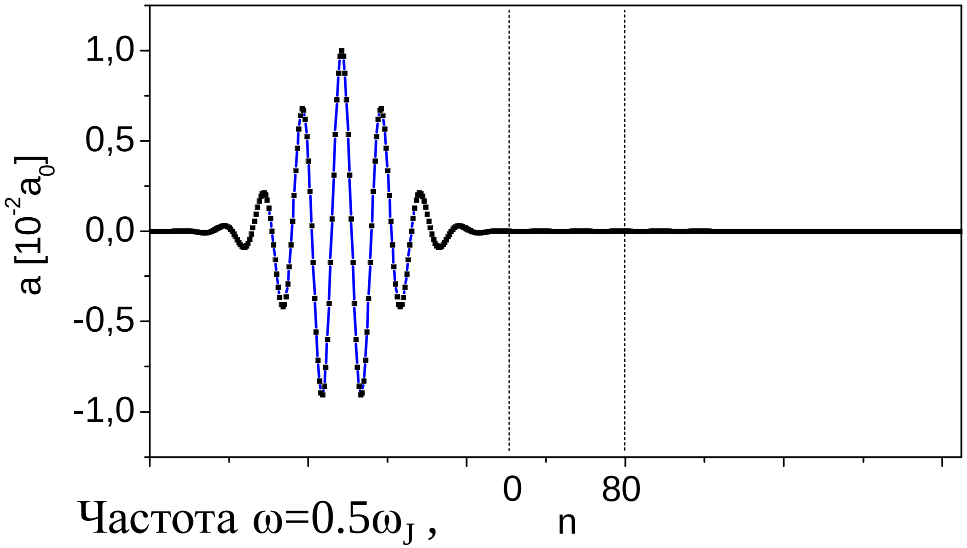
Пробный (слабый) импульс.
Частота $\omega=\omega_J/2$
(соответствует середине щели),
скорость $\tilde{\upsilon}=c$,
ширина импульса $l=80L_0$.

Частичное прохождение импульса – ширина щели $\delta\omega_1=0.04\omega_J$ сравнима с неопределенностью частоты импульса $\Delta\omega=2\pi\tilde{\upsilon}/l=0.16\omega_J$

Частота начального импульса лежала выше щели $\omega=0.6\omega_J$,
скорость $\tilde{\upsilon}=c$,
ширина импульса $l=80L_0$.



Анализ квантового состояния кубитов по фазе слабого сигнала



Частота $\omega=0.5\omega_J$,
скорость $\tilde{\upsilon}=c$,
ширина импульсов $l=40L_0$.

Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{\upsilon}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \chi(z,t)\cdot a$$

Функция χ достаточно мала:

$$\chi << \omega^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} << \omega A, \quad \frac{\partial A}{\partial z} << kA$$

Решение ищется в виде:

$$a(t,z) = A(z,t)\exp\left(i(kz-\omega t)\right)$$

Волновое уравнение приводится к виду:

$$\tilde{\upsilon}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{2\omega}\chi(z)A$$

Решение волнового уравнения для случая малого χ

Общее решение волнового уравнения:

$$\Phi\left(z-\tilde{v}t, \int \chi(z)dz + i2\tilde{v}\omega\ln(A)\right) = 0$$

Решение волнового уравнения для случая гауссовой огибающей импульса:

$$A(z,0) = A_0 \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right)$$

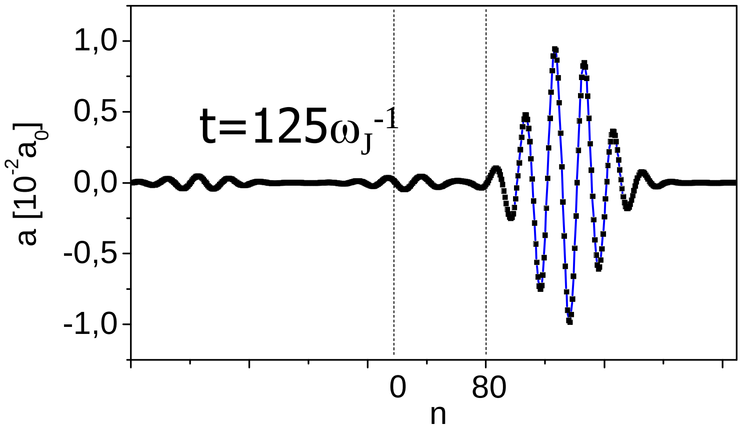
$$A(z,t) = A_0 \exp\left(-\frac{(z-\tilde{v}t)^2}{l^2}\right)\cdot\exp\left(-\frac{i}{2\tilde{v}\omega}\left(\int \chi(z-\tilde{v}t)d(z-\tilde{v}t) - \int \chi(z)dz\right)\right)$$

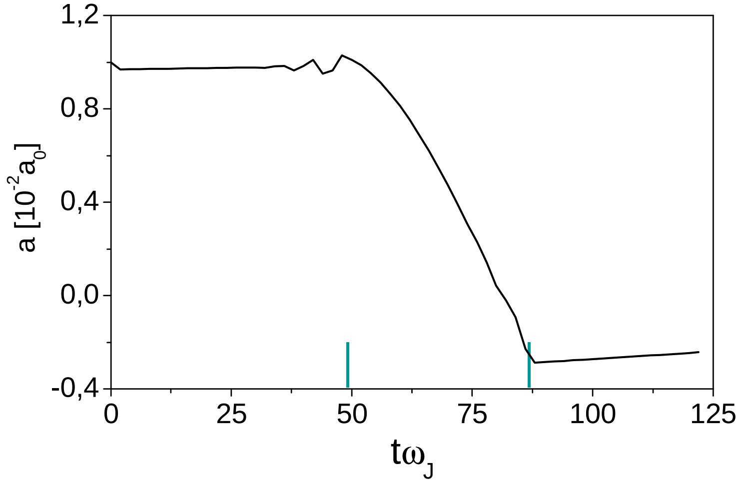
Случай $\chi(z) = const$:

$$a(z,t) = A_0 \exp\left(-\frac{(z-\tilde{v}t)^2}{l^2}\right)\cdot\exp\left(ik(z-\tilde{v}t)\right)\cdot\exp\boxed{\left(\frac{i\chi t}{2\omega}\right)}$$

В движущейся точке $z-\tilde{v}t=0$ сдвиг фазы определяется величиной $\chi/2\omega$

Изменение фазы сигнала. Численное моделирование





Закон дисперсии для волн в активной области:

$$-\omega^2 + \tilde{\upsilon}^2 k^2 = \chi$$

Групповая скорость распространения импульса в активной области:

$$V_{gr} = \frac{\tilde{\upsilon}^2 k}{\sqrt{\tilde{\upsilon}^2 k^2 - \chi}} < \tilde{\upsilon}, \quad (\chi < 0)$$

Длина активной области $l_\chi = 80L_0$, $\chi_{00} = -0.04\omega^2_J$

Время прохождения импульса через активную область:

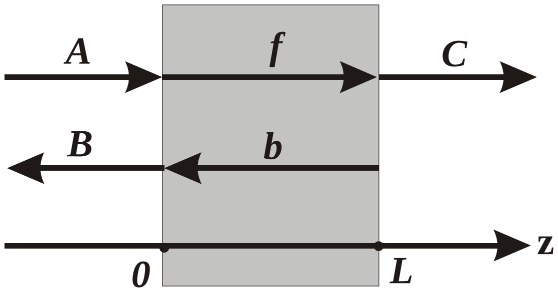
$$t_\chi = l_\chi / \tilde{\upsilon}$$

Изменение фазы согласно теоретическим оценкам:

$$\phi = \frac{\chi}{2\omega} t_\chi \qquad \phi = -1.6$$

В движущейся точке $z - \tilde{\upsilon}t = 0$ поле должно быть близко к нулю.

Коэффициент прохождения через волноводную линию



$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\chi_0 \sin a$$

Волновое уравнение
(учет кубического члена в правой части):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \tilde{v}^2 \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\chi_0 \left(1 - \frac{1}{6}a^2\right) a$$

Решение ищется в виде:

$$a(z,t) = A \exp\left(i(kz - \omega t)\right) + B \exp\left(-i(kz + \omega t)\right) + c.c., \quad z < 0,$$

$$a(z,t) = C \exp\left(i(kz - \omega t)\right) + c.c., \quad z > L,$$

$$a(z,t) = f \exp\left(i(qz - \omega t)\right) + b \exp\left(-i(qz + \omega t)\right) + c.c., \quad 0 < z < L,$$

$$q = \sqrt{k^2 - \chi_0/\tilde{v}^2}$$

Волновое уравнение с учетом кубической нелинейности

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{i\chi_0}{4q\tilde{v}^2}\left(|f|^2 + 2|b|^2\right) f,$$
$$\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{-i\chi_0}{4q\tilde{v}^2}\left(|b|^2 + 2|f|^2\right) b.$$

Система уравнений имеет решение:

$$f(z) = \eta \exp\left(\frac{i\chi_0}{4q\tilde{v}^2}\left(|\eta|^2 + 2|\xi|^2\right) z\right)$$
$$b(z) = \xi \exp\left(\frac{-i\chi_0}{4q\tilde{v}^2}\left(|\xi|^2 + 2|\eta|^2\right) z\right)$$

где ξ и η - постоянные

Коэффициент прохождения через волноводную линию $T = |C|^2/|A|^2$

$$T = \frac{t^4\frac{q^2}{k^2}}{\left|1 - r^2 \exp\left(i\left(2qL + 3\frac{\chi_0}{4q\tilde{v}^2}\frac{1+r^2}{t^2}\frac{k^2}{q^2}T|A|^2 L\right)\right)\right|^2} \qquad t = \frac{2k}{k+q}, \quad r = \frac{k-q}{k+q}$$

T=1 при выполнении условия:

$$2qL + 3\frac{\chi_0}{4q\tilde{v}^2}\frac{1+r^2}{t^2q^2/k^2}T|A|^2 L = 2\pi n, \quad n \in Z$$

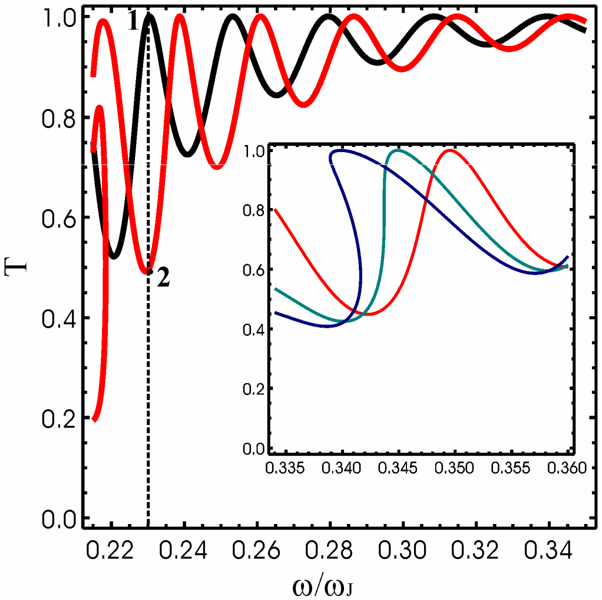
Бистабильность

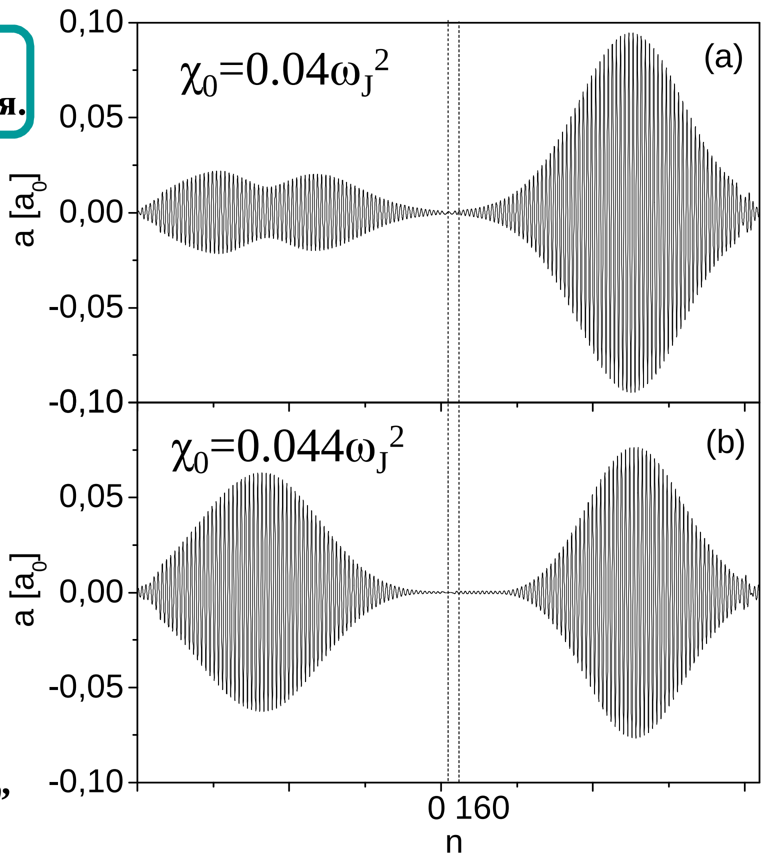
Небольшие изменения в χ (в квантовом состоянии кубитов) ведет к значительному изменению коэффициента прохождения.

(a) $\chi_0=0.04\omega_J^2$

(b) $\chi_0=0.044\omega_J^2$

Вкладка: коэффициент прохождения T
Красный A=0.1
Зеленый A=0.14
Синий A=0.16
(для всех $\chi_0=0.1\omega_J^2$)





Частота $\omega=0.23\omega_J$, скорость $\tilde{\upsilon}=c$, ширина импульсов *$l=960L_0$*, амплитуда начального импульса *$A=0.1$*, длина активной области *$L=160L_0$*.

Возможность определять небольшие изменения в квантовом состоянии последовательности кубитов по отклику среды

Выводы

- **Показана возможность создания пространственной периодической модуляции населенности кубитов при помощи электромагнитных импульсов, распространяющихся навстречу друг другу вдоль волноводной линии. Период модуляции определяется длиной волны импульсов как $\lambda/2$.**

- **Полученная в результате структура проявляет свойства фотонных кристаллов, в ней могут наблюдаться энергетические щели в спектре частот.**

- **Показано, что квантовое состояние последовательности кубитов можно анализировать при помощи слабых электромагнитных импульсов. Сдвиг фазы импульса пропорционален плотности вероятности нахождения кубитов в возбужденном состоянии.**

- **Рассчитан коэффициент прохождения электромагнитной волны через нелинейную активную область, сформированную последовательностью кубитов.**

- **Малые изменения квантового состояния кубитов вызывает значительное изменение коэффициента прохождения волны, что дает возможность определять с высокой точностью состояние кубитов по отклику активной среды.**