

АВТОГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ФОНТАНОМ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Дружинин О.А., Троицкая Ю.И.
ИПФ РАН

Цель работы:

- Экспериментальные и натурные данные говорят о том, что фонтаны, возникающие при распространении вертикальных плавучих струй в стратифицированной жидкости способны генерировать внутренние волны (Бондур и др. 2006, Keeler et al. 2005, Троицкая и др. 2008).
- Целью работы является прямое численное и теоретическое моделирование динамики фонтана, образующегося при проникновении вертикальной струи нейтральной плавучести сквозь пикноклин

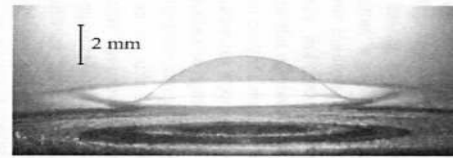


FIGURE 3. Visualization of a weak steady axisymmetric fountain at $Re = 21$ and $Fr = 0.71$, with $U_0 = 0.88 \text{ cm s}^{-1}$, $R_0 = 2.4 \text{ mm}$ and $\Delta\rho/\rho_f = 0.00646$.

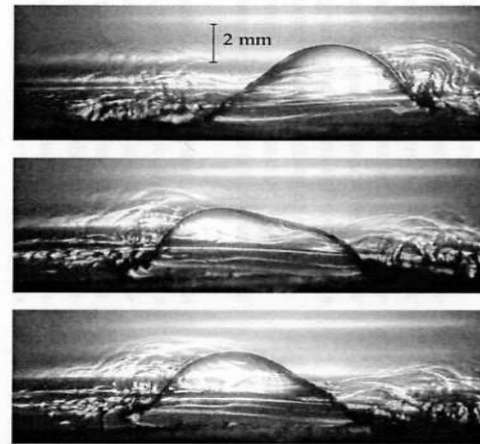


FIGURE 4. Visualization of flapping fountain at $Re = 72$ and $Fr = 1.0$, with $U_0 = 3.2 \text{ cm s}^{-1}$, $R_0 = 2.4 \text{ mm}$ and $\Delta\rho/\rho_f = 0.00454$.

Between $16Re^{-2/3} < Fr < 27Re^{-2/3}$ the flow becomes unstable, resulting in several interesting modes of oscillation. The first mode of oscillation is a two-dimensional flapping motion. This usually, but not always, develops into a flapping mode, whereby the plane of flapping rotates about the fountain axis, so the direction of flapping changes. This behaviour then develops into a circling or multimodal flapping motion, where the top of the fountain circles around the fountain axis. In many cases the fountain was observed to switch continually between the different flapping/circling modes. The motion of a flapping fountain is captured in figure 4, where the peak of the fountain can be seen as it moves from one side to the other. The motion can also be seen in movie 1 (available with the online version of the paper).

In the laminar bobbing region the fountain behaviour is highly unsteady and three-dimensional. It is characterized by the rapid fluctuation in fountain height, as the fountain front continually rises, stagnates and then collapses around the next rising front. A distinct difference between this behaviour and the flapping/circling modes is that, with the bobbing motion, the fountain height is always at a maximum in the centre of the fountain axis, whereas for the flapping or circling modes, the location of maximum fountain height is always off-axis. On the regime plot in figure 2, this region occurs for $35Re^{-2/3} < Fr \lesssim 10$. A series of typical images of a laminar bobbing

Williamson et al.
JFM 608 (2008):
Flapping mode

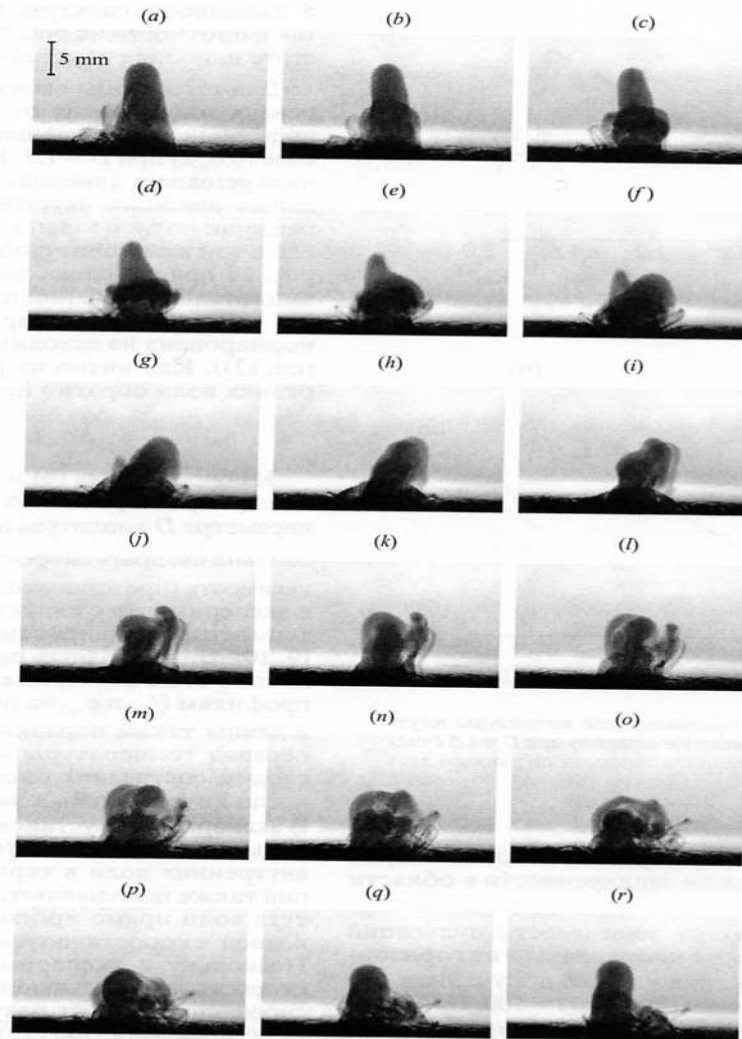


FIGURE 5. Visualization of laminar bobbing behaviour present at $Re = 123$ and $Fr = 2.1$, with $U_0 = 5.4 \text{ cm s}^{-1}$, $R_0 = 2.4 \text{ mm}$ and $\Delta\rho/\rho_f = 0.033$. Between (a) and (r) a series of fountain fronts rise and fall around the fountain column. Images are about 60.7 ms apart, with image (a) taken 12.991 s from the start of the run.

fountain is given in figure 5. In figure 5(a) the fountain is at its maximum height. In figure 5(a-f) the fountain front collapses and then rises again in figure 5(g-k), collapses in figure 5(l-o) and then rises again in (p-r). Between the flapping motion

Williamson et al.
JFM 608 (2008):
Bobbing mode

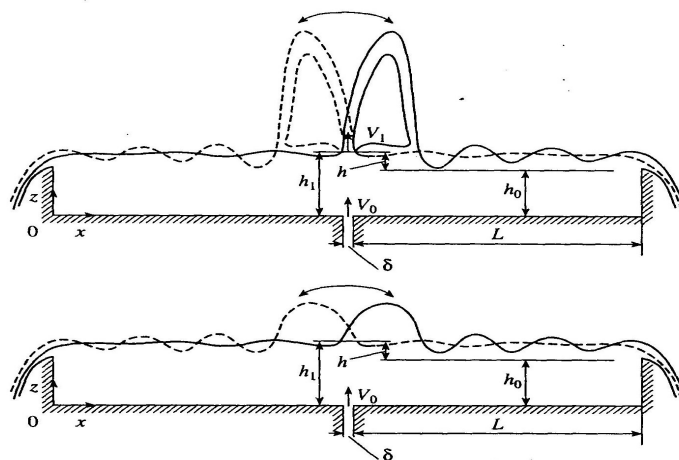


Рис. 1.

Согласно П-теореме теории размерностей для безразмерного периода автоколебаний имеем

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{\delta/g}} = \Phi\left(\frac{V_0}{\sqrt{g\delta}}, \frac{h_0}{\delta}, \frac{L}{\delta}, \frac{S}{\delta}, \frac{\rho g^{1/2} \delta^{3/2}}{\mu}, \frac{d_i}{\delta}\right).$$

Исследование показало, что в рассмотренных диапазонах значений определяющих параметров период T зависит главным образом лишь от двух первых аргументов этого соотношения, а остальные не являются существенными.

При малых V_0 наблюдаются указанные выше симметричные стационарные течения с растеканием воды в обе стороны от канала в водосливном или волновом режиме [3]. С ростом V_0 эти течения становятся квазистационарными. Для каждого относительного заглубления $p_i = h_0/\delta$ при определенном значении $F = F_i$ их вид резко изменяется и возникают рассматриваемые устойчивые поперечные автоколебания.

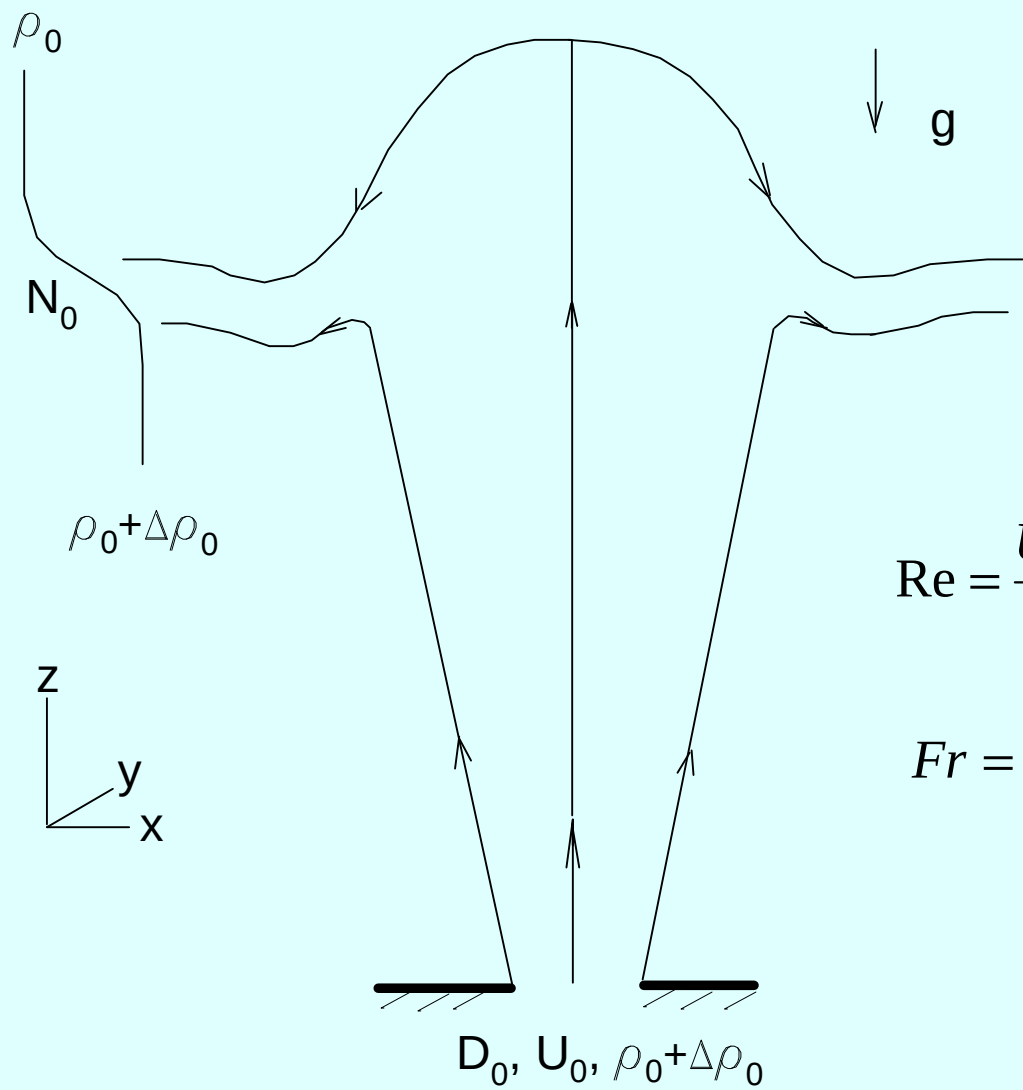
Установлено, что основной причиной существования автоколебаний является возникновение в окрестности затопленного участка вытекающей из канала струи периодически меняющихся на направление на противоположное поперечных перепадов давления, сообщающих частицам жидкости в струе соответствующий импульс. Эти перепады давления в случае свободного фонтани-

рования вызываются импульсами, приходящими с места падения свободной струи на поверхность жидкости, а при режимах, когда свободное фонтанирование отсутствует, связаны с отличием в значениях гидростатической составляющей давления из-за разницы глубины жидкости по обеим сторонам от канала.

Полученные в экспериментах значения $T = \tau/\sqrt{\delta/g}$ в изученном диапазоне чисел Фруда $F = V_0/\sqrt{\delta g}$ представлены точками на рис. 2 для шести указанных в табл. 1 значений относительной глубины затопления выходного сечения канала $p = h_0/\delta$, в диапазоне $0 \leq p \leq 40$ (сплошные линии на рис. 2 – расчет).

Обращает на себя внимание нетривиальный характер полученных зависимостей. Если с увеличением F при $p = 0$ и $p = 5$ существует монотонный рост периода T , то уже при $p \geq 10$ сначала наблюдается весьма быстрое убывание его до определенного минимального значения $T_{\min}$ и затем снова рост. Значения $T_{\min}$ для различных p существенно отличаются друг от друга. Однако при этом способе обработки и представления данных экспериментов, а именно, в виде зависимостей безразмерного периода $T^* = \tau/\sqrt{h_0/g}$ от числа Фруда вида $F^* = V_0/\sqrt{gh_0}$, значения $T_{\min}^*$ для всех

Карликов, Трушина
ДАН (1998)



$$Re = \frac{U_0 D_0}{\nu}$$

$$Fr = \frac{U_0}{N_0 D_0}$$

Основные уравнения

Уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска:

$$\partial_t U_i + U_j \partial_j U_i = -\partial_i P + \frac{1}{\text{Re}} \partial^2 U_i - \frac{\delta_{iz}}{\text{Fr}^2} \rho,$$
$$\partial_j U_j = 0.$$

Уравнение для плотности :

$$\partial_t \rho + U_j \partial_j \rho + U_z \frac{d\rho_{ref}}{dz} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \partial^2 \rho$$

Исходный профиль плотности:

$$\rho_{ref}(z) = 1 + 0.5[1 - \tanh 2(z - z_0)]$$

Основные параметры DNS

Число Рейнольдса $Re = \frac{U_0 D_0}{\nu}$

Число Фруда $Fr = \frac{U_0}{N_0 D_0}$

DNS выполнялось при $0 < Fr < 9$ and $Re = 400$

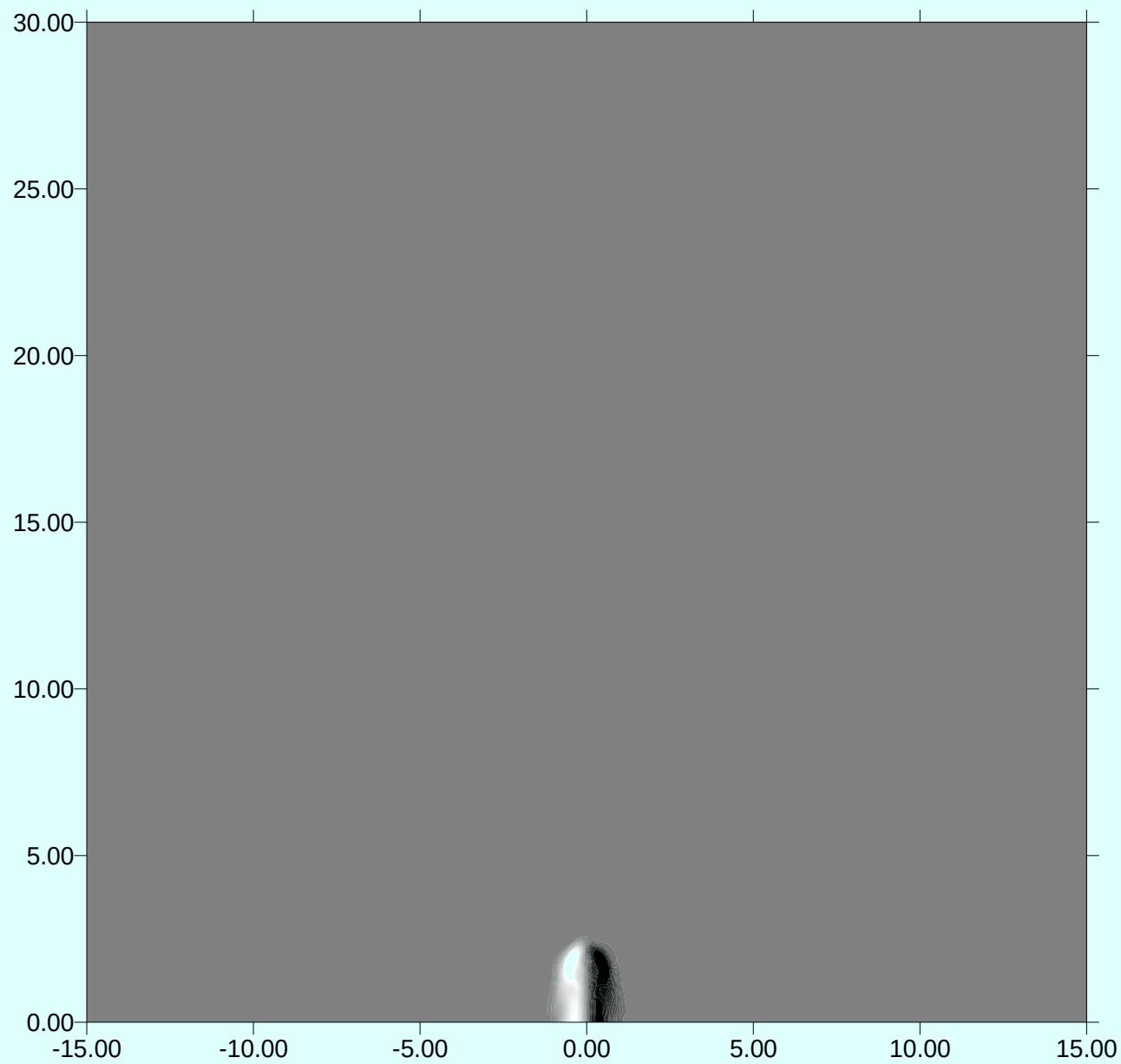
Описание численного метода

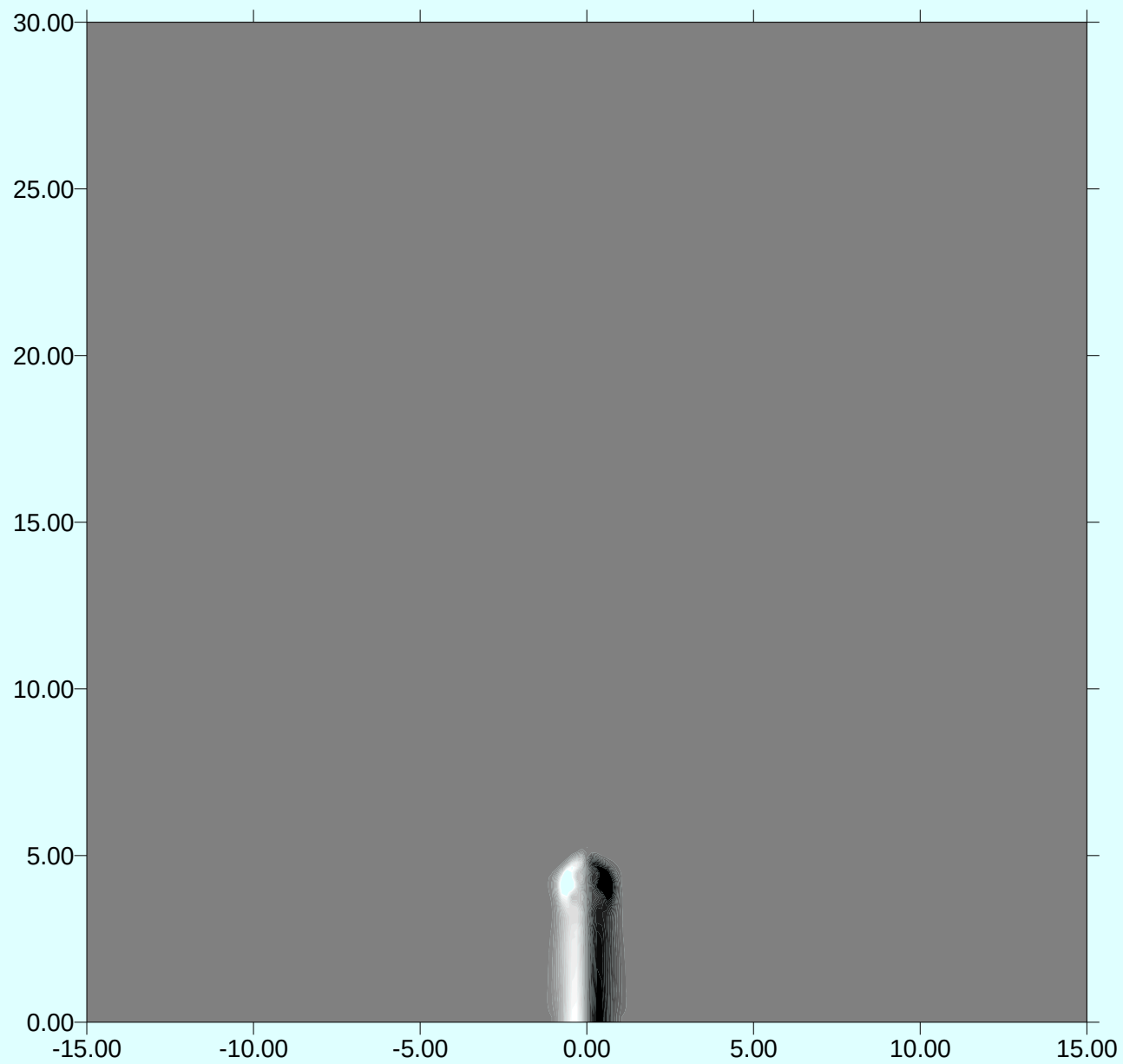
Интегрирование основных уравнений проводится на равномерной сетке размером 200 x 200 x 200 с шагом 0.15 по каждой координате и шагом по времени 0.015. На боковых и верхней границах ставится граничное условие Неймана по всем координатам. На нижней границе (при $z=0$) ставится граничное условие для скорости в виде:

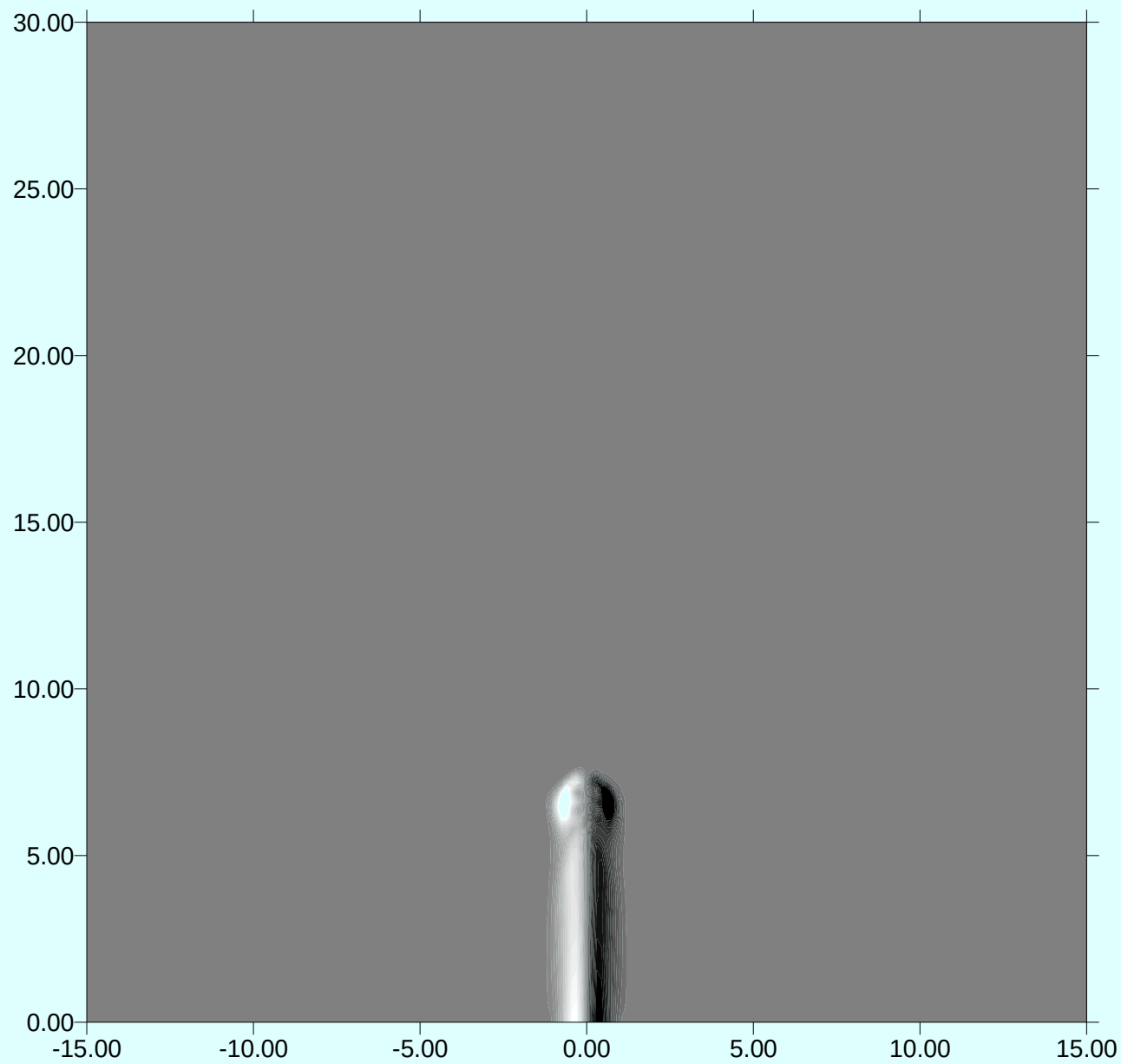
$$U_i^b(x, y, t) = \exp(-4(x^2 + y^2))(\delta_{iz} + U_{fi}(x, y, t))$$

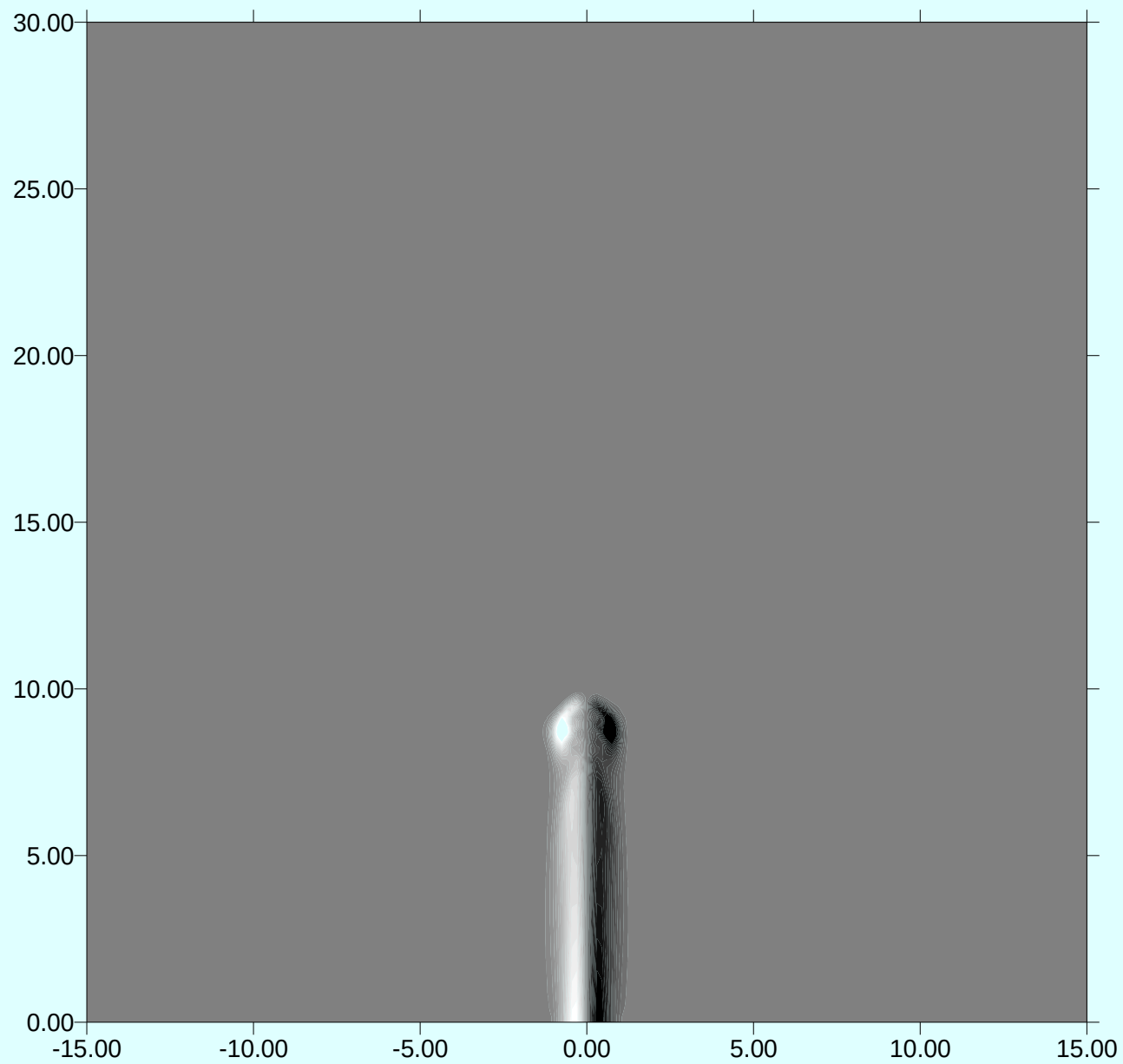
при амплитуде флуктуаций 0.001. В начальный момент времени Поля скорости и плотности полагались равными 0. Адиабатически «включалось» граничное условие для скорости. Установление статистически стационарного течения происходило при $t > 120$. Далее вычисления проводились на интервале времени, включающем 5-6 периодов внутренних волн, генерируемых в пикноклине.

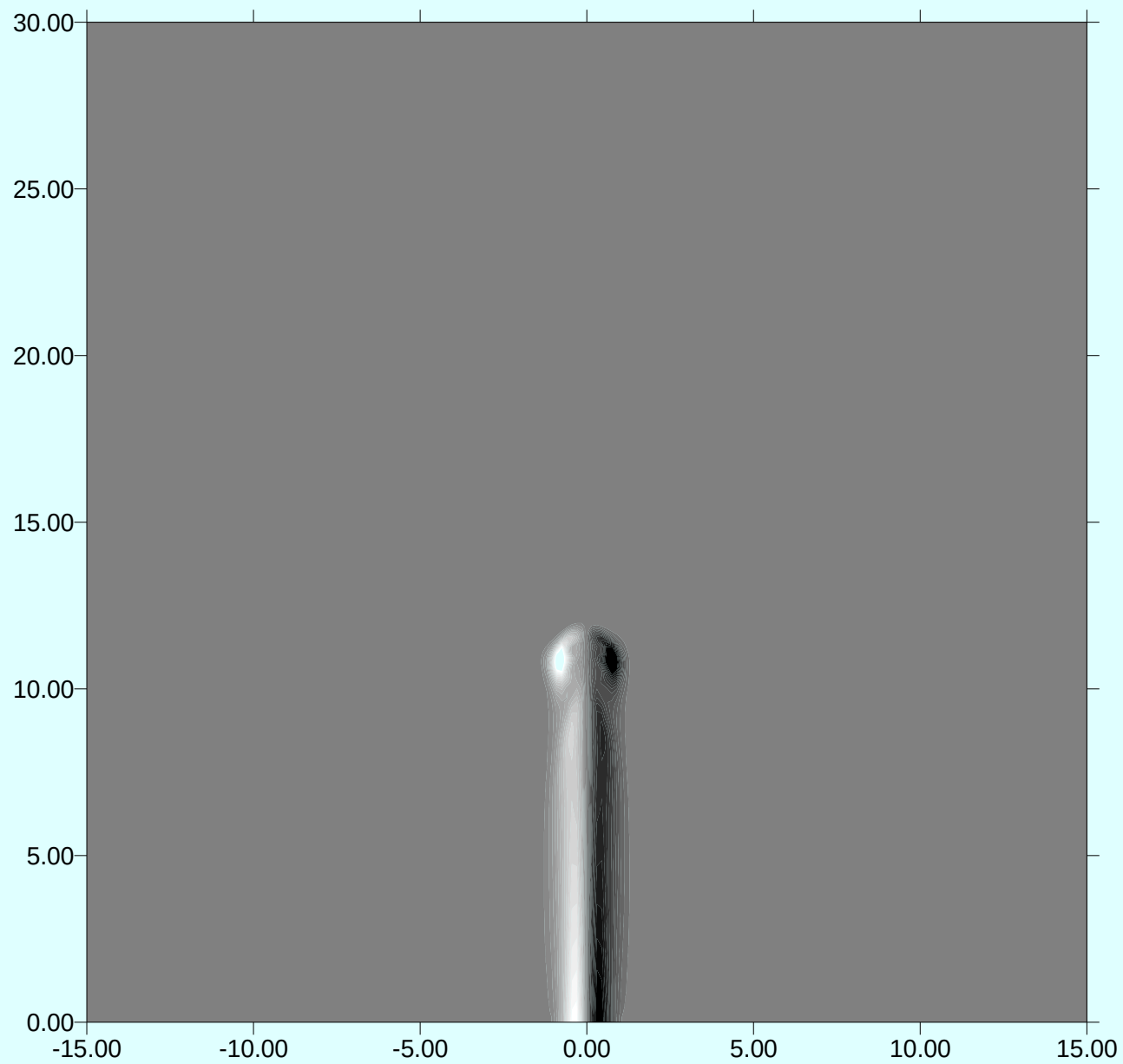
$$\text{Fr} = 2.5$$

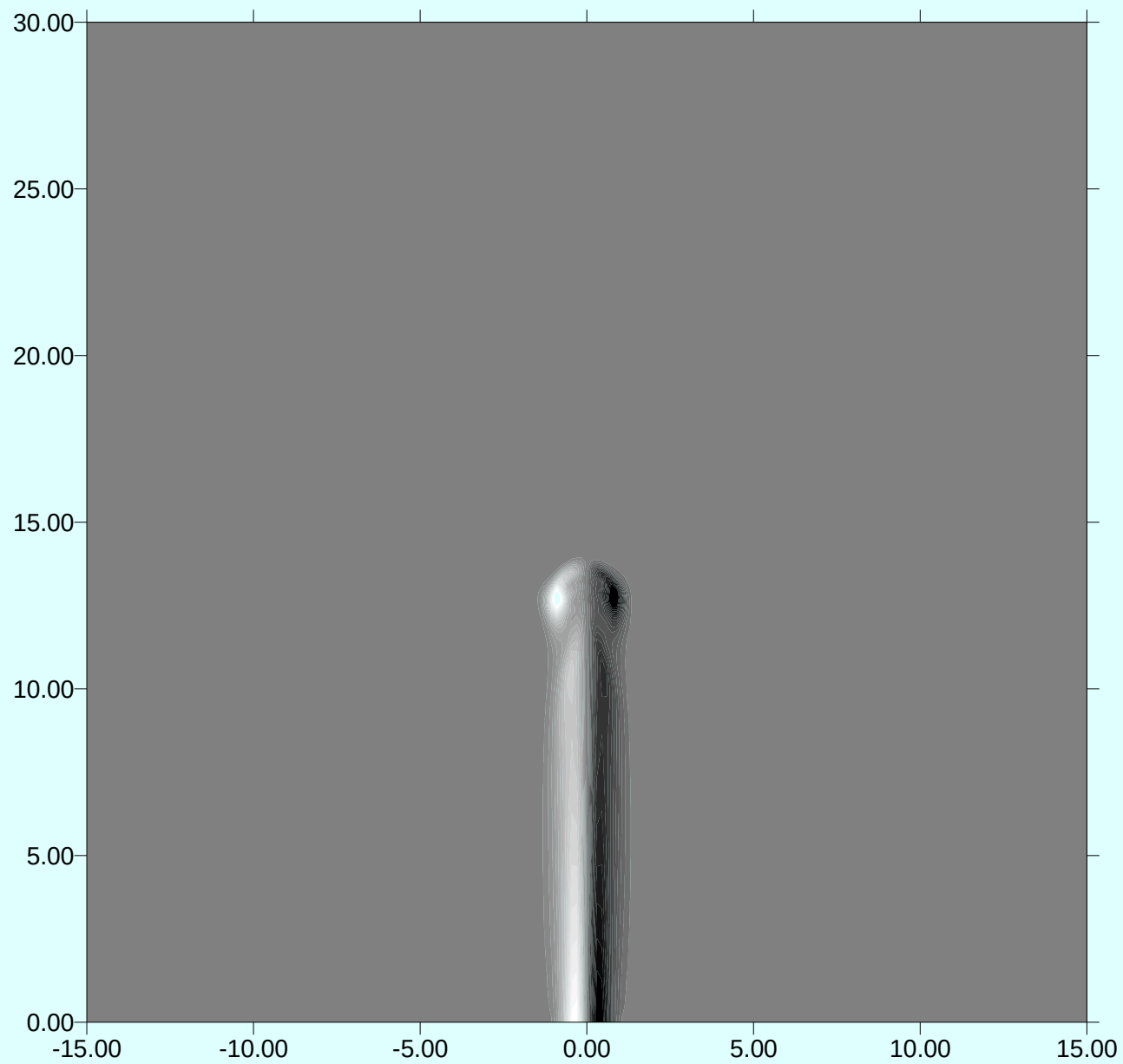


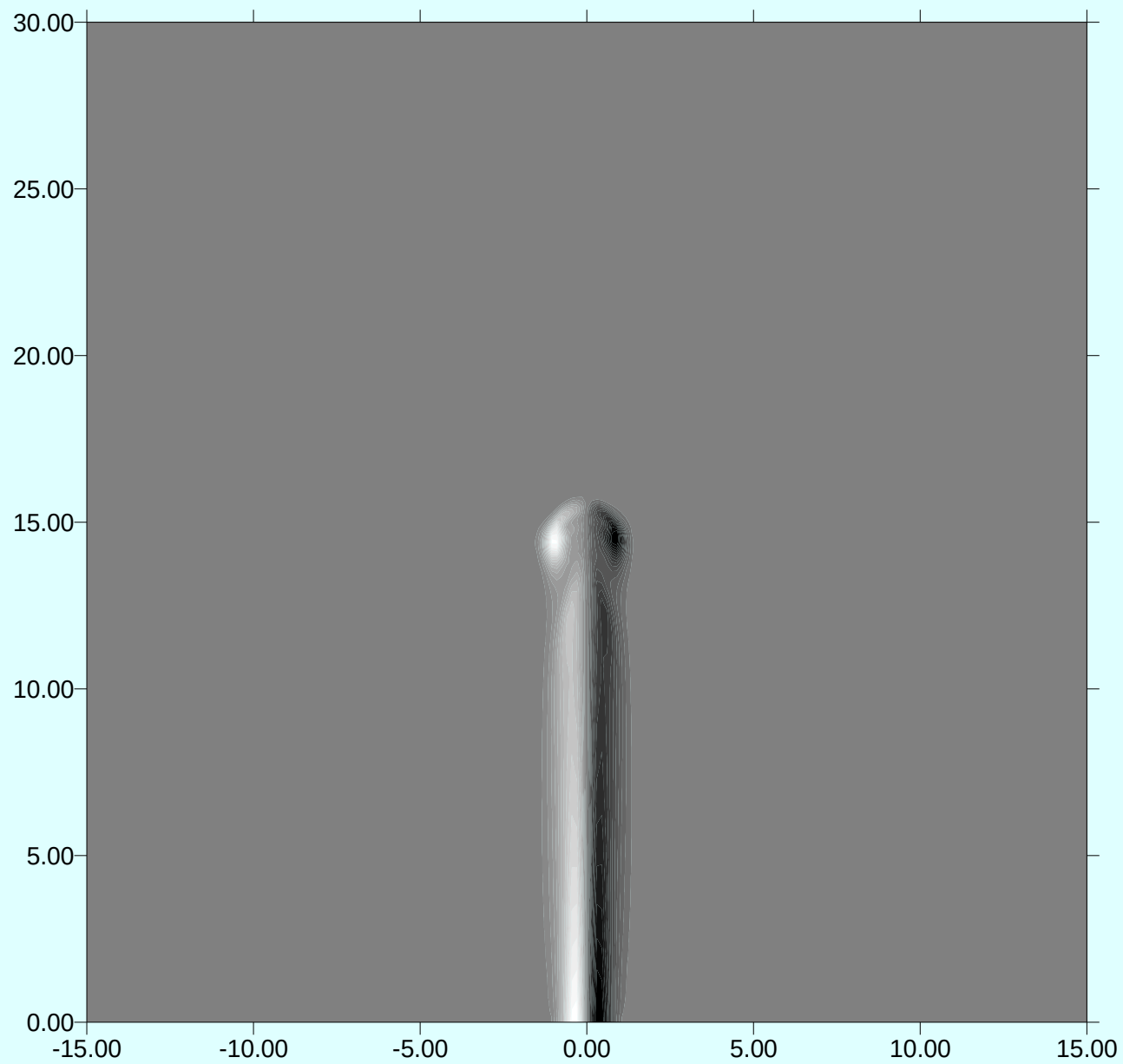


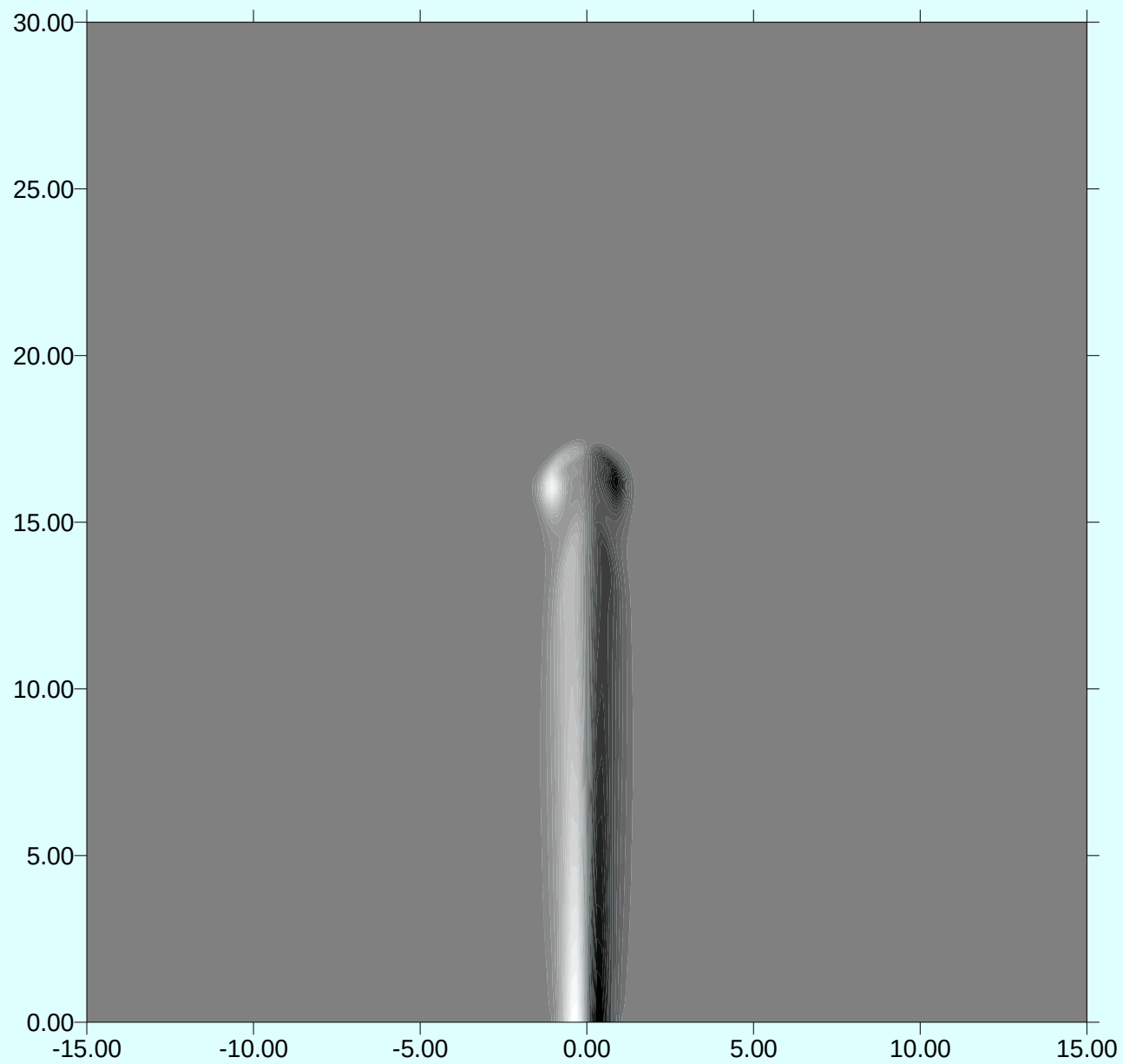


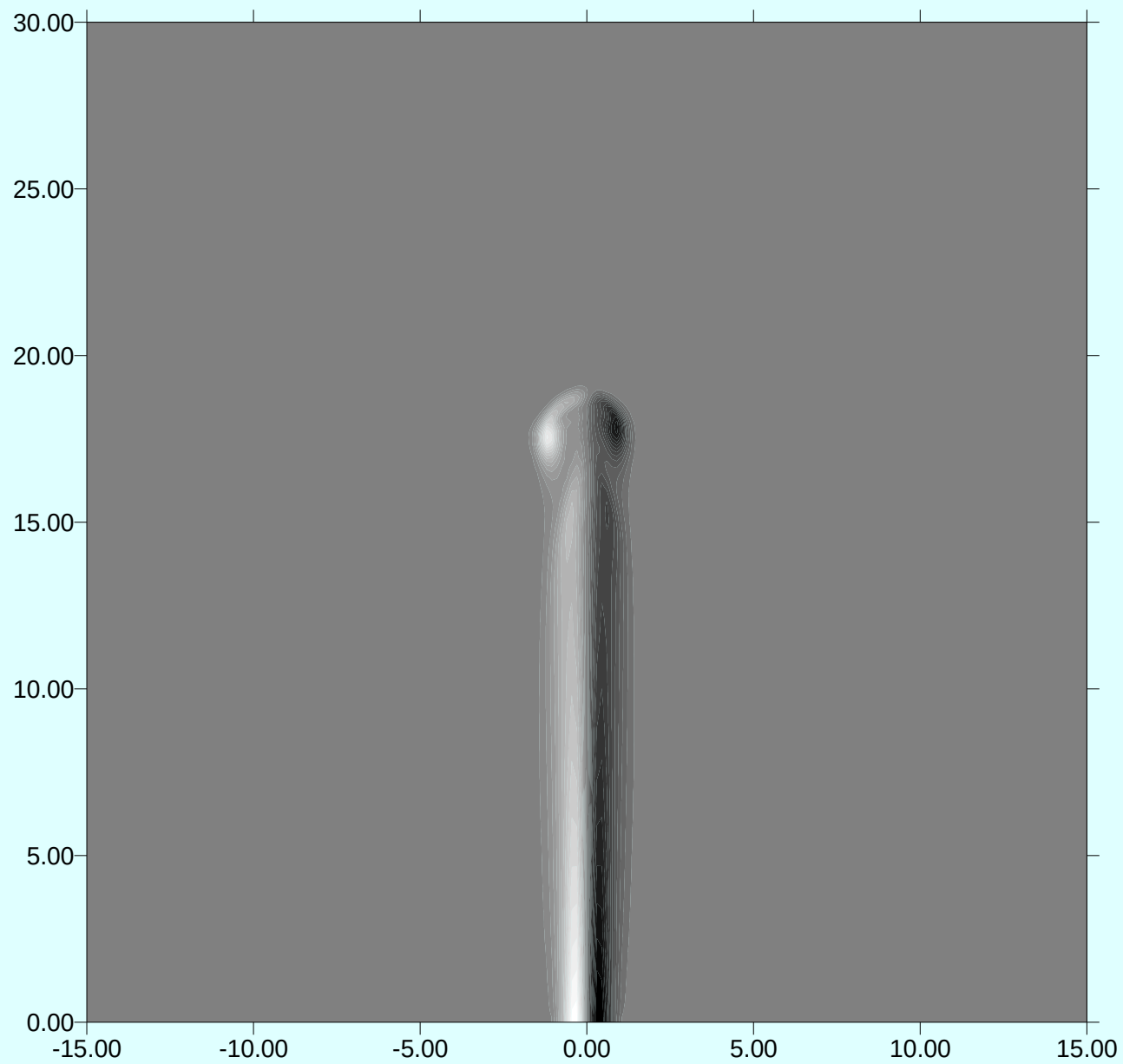


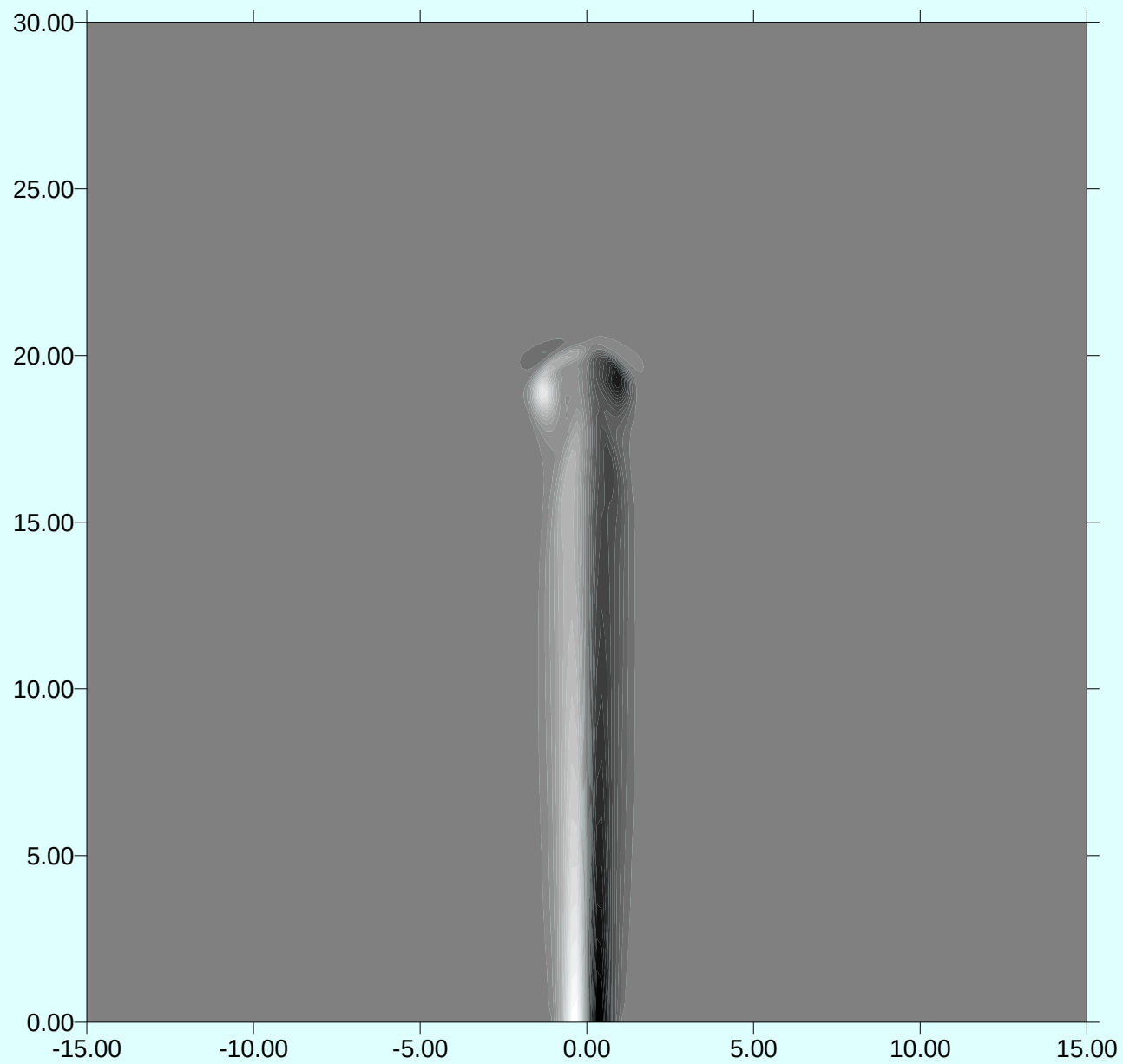


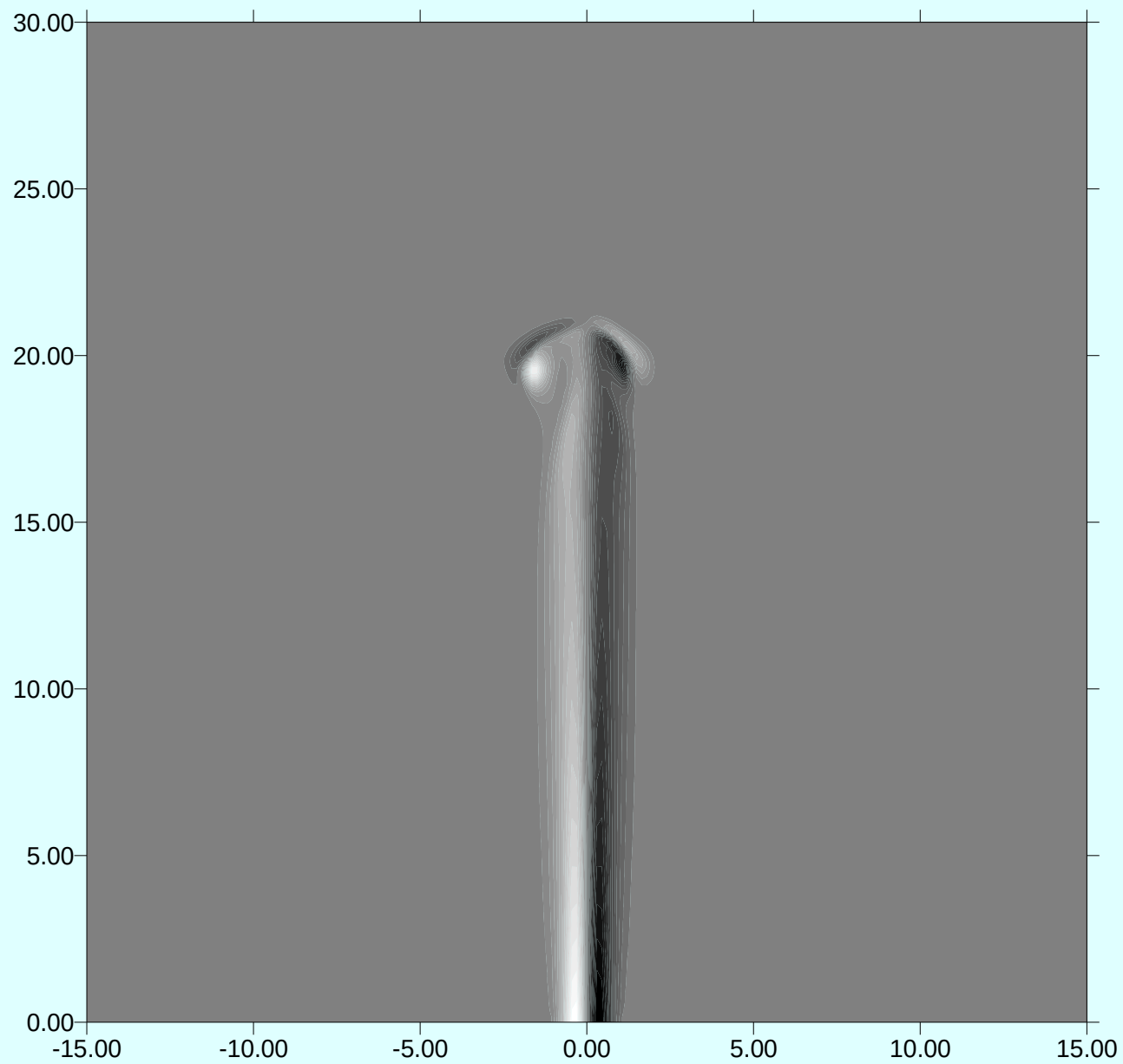


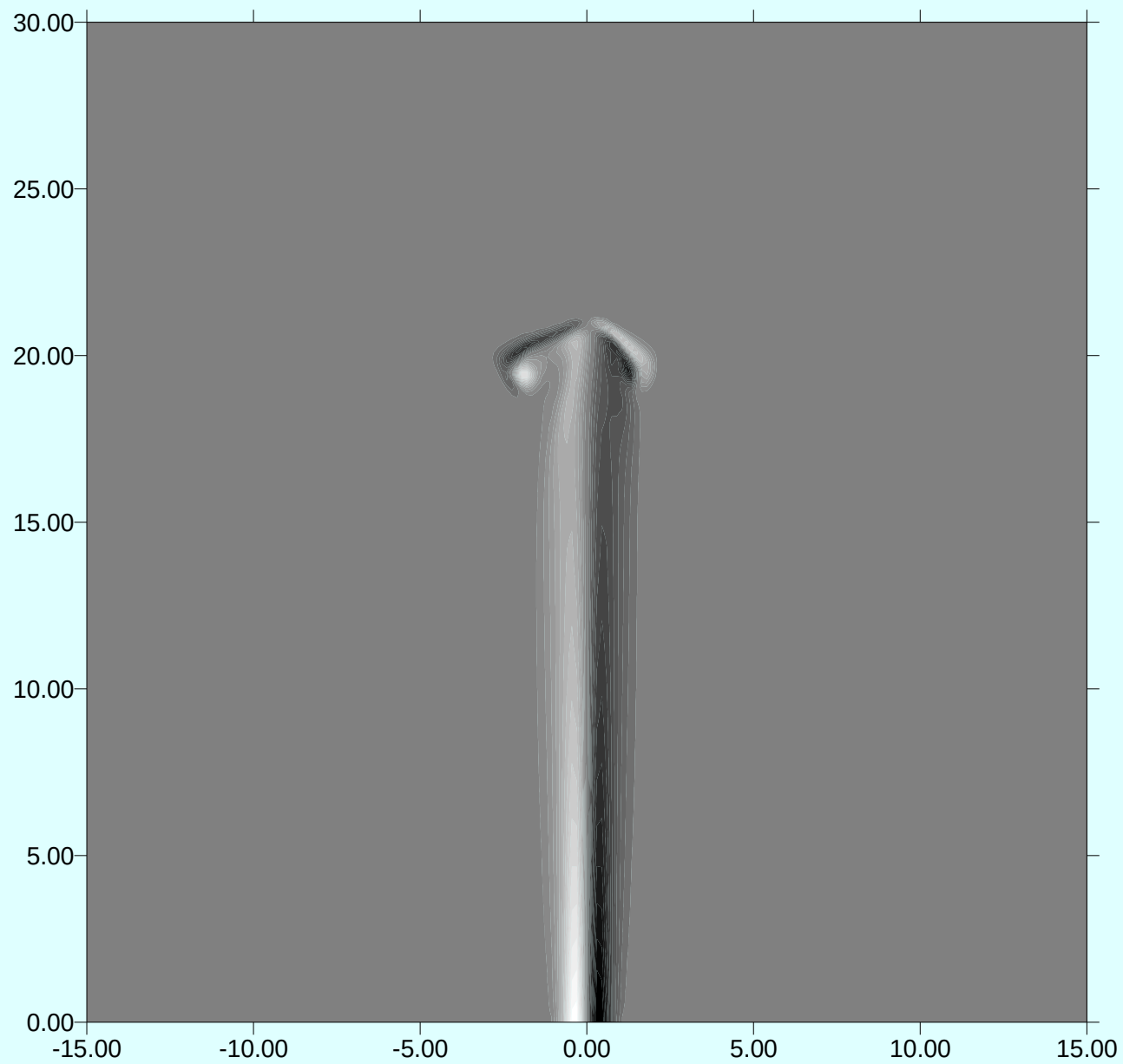


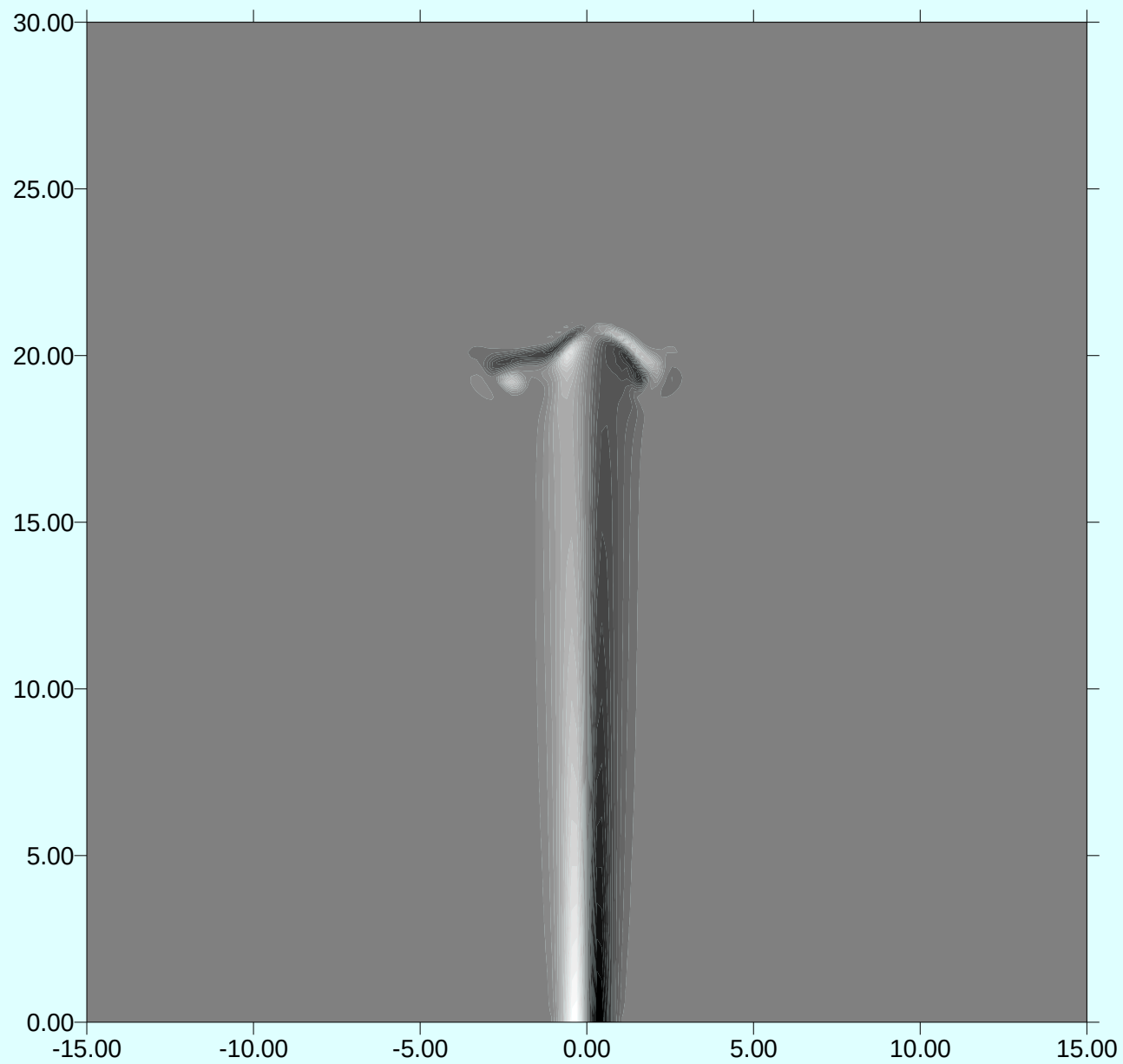


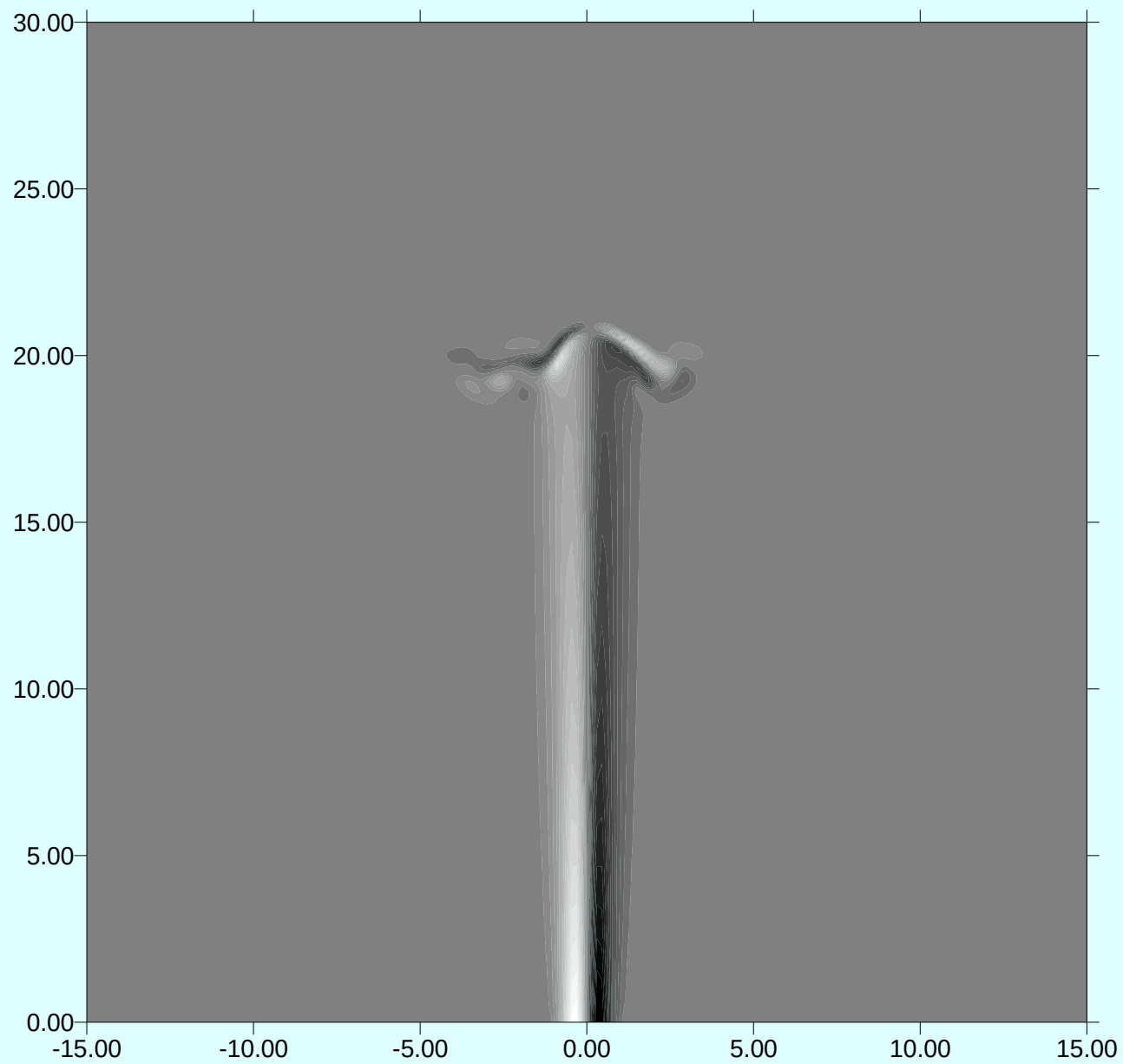


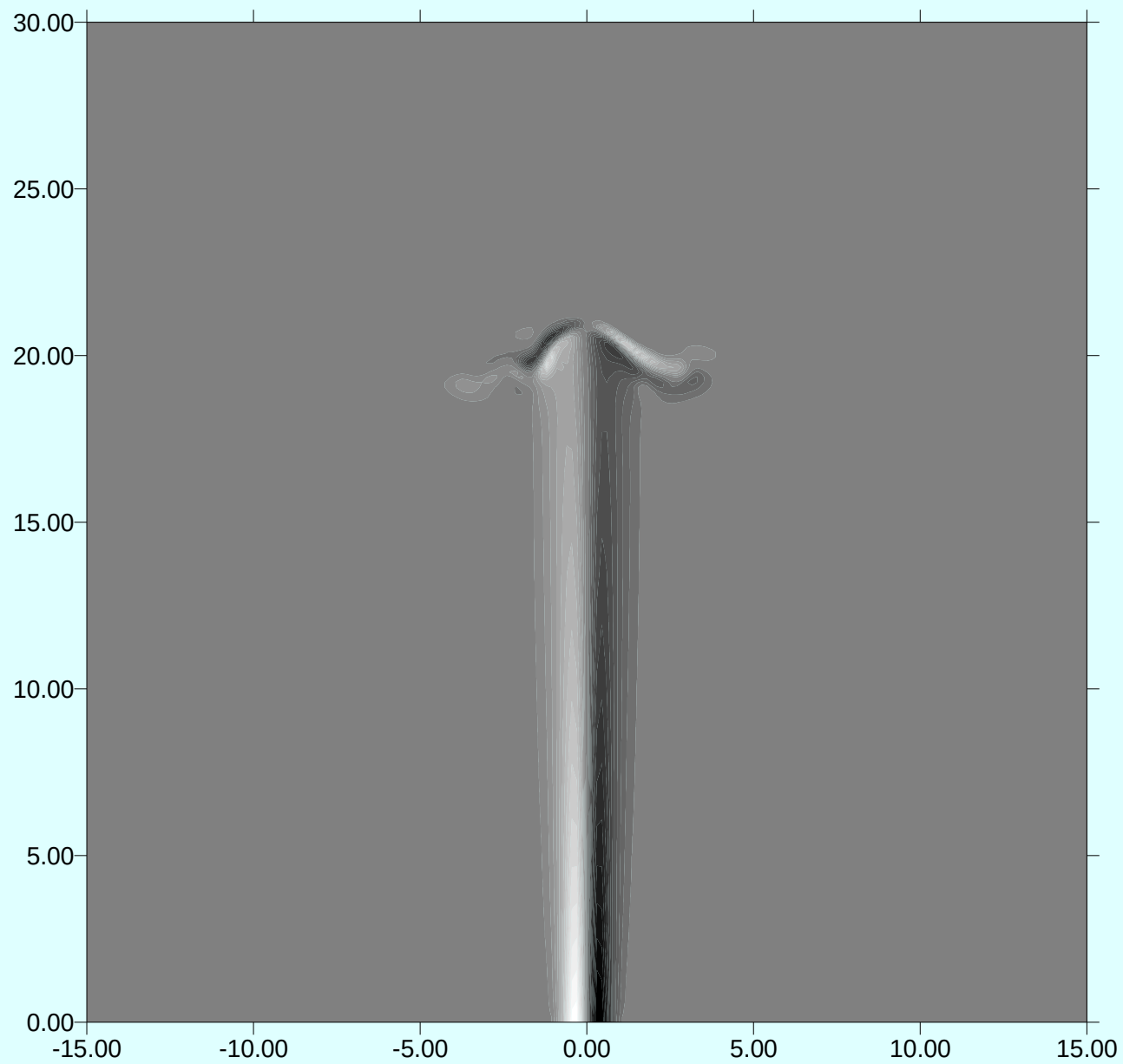


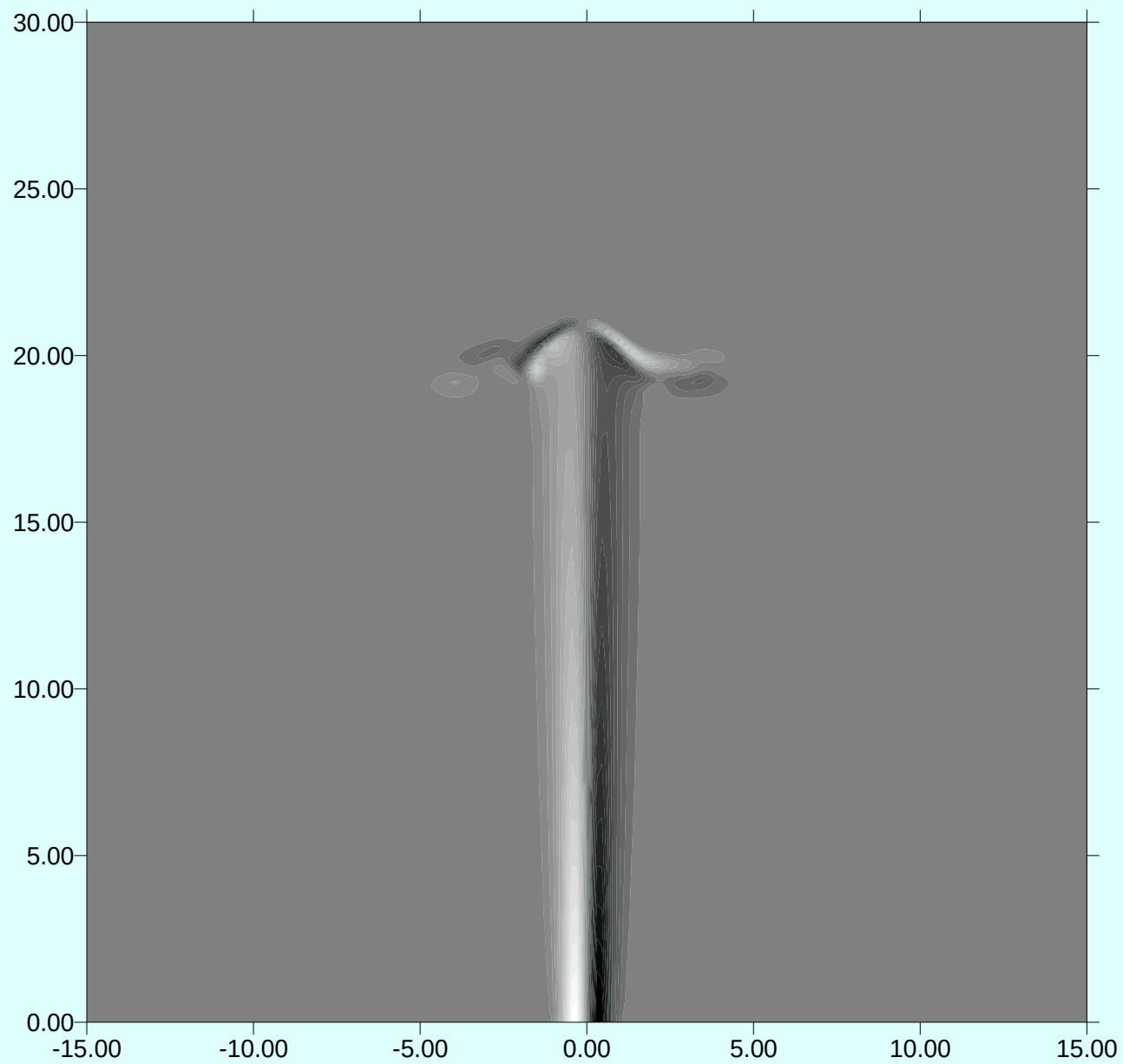


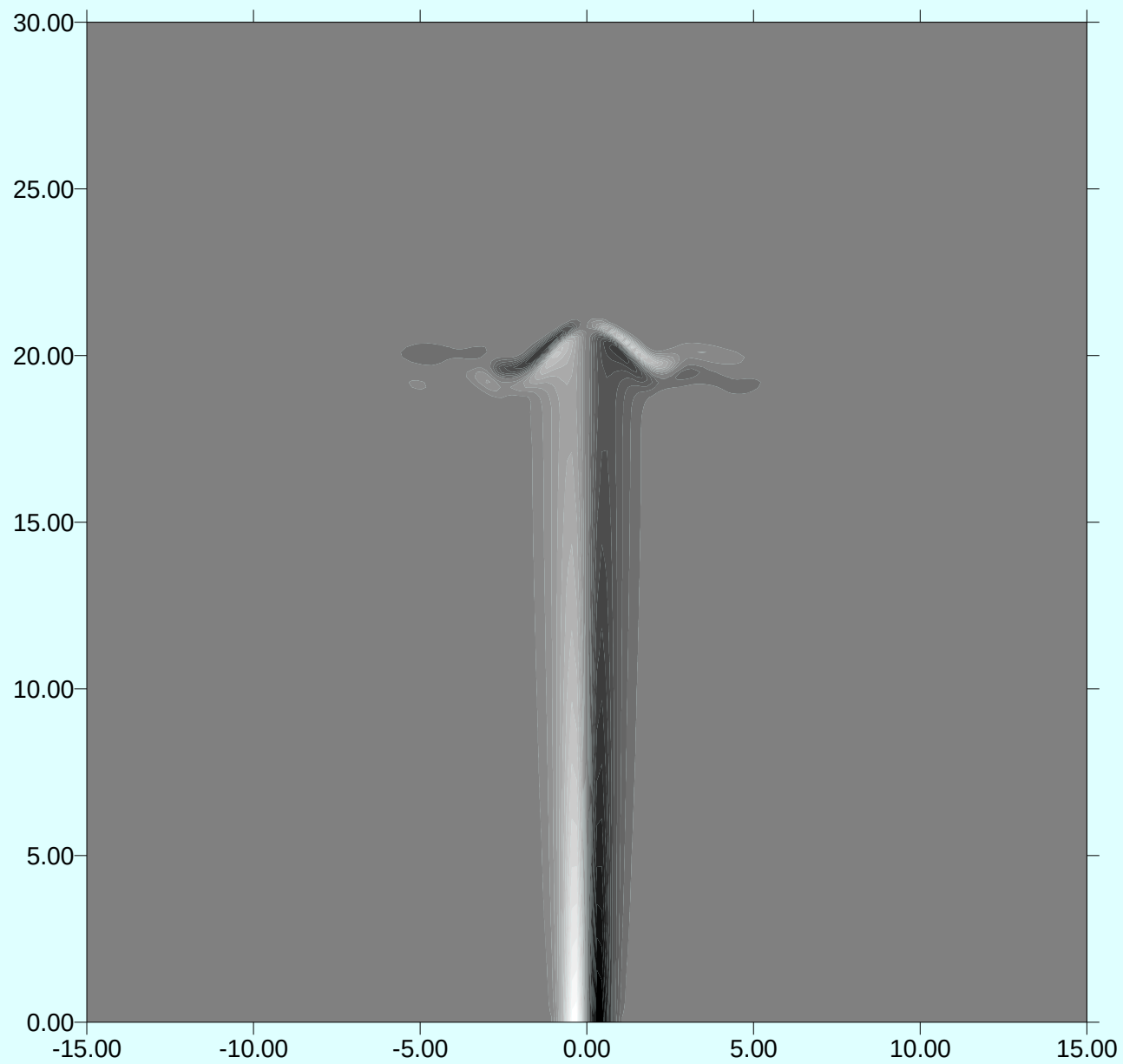


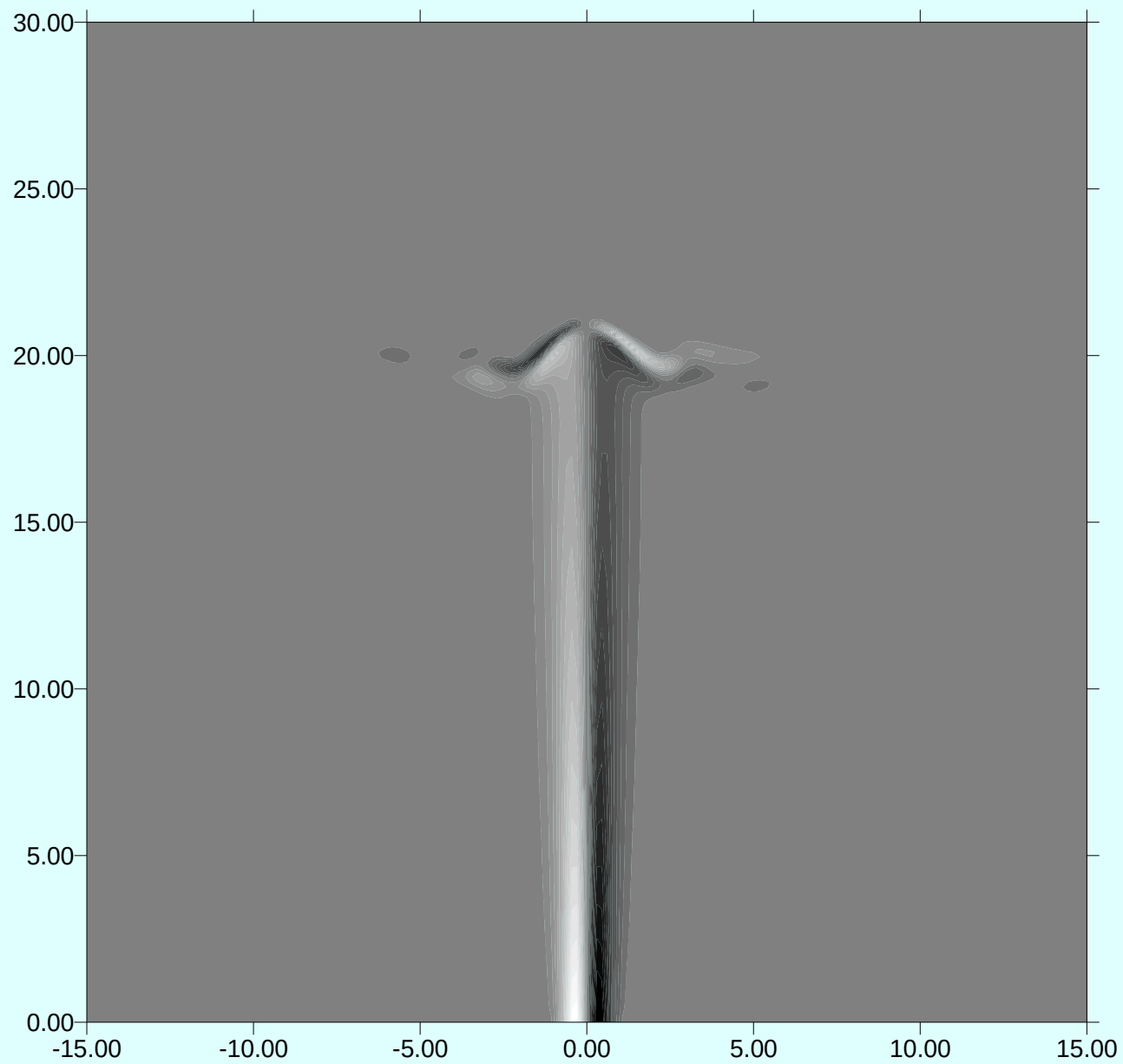


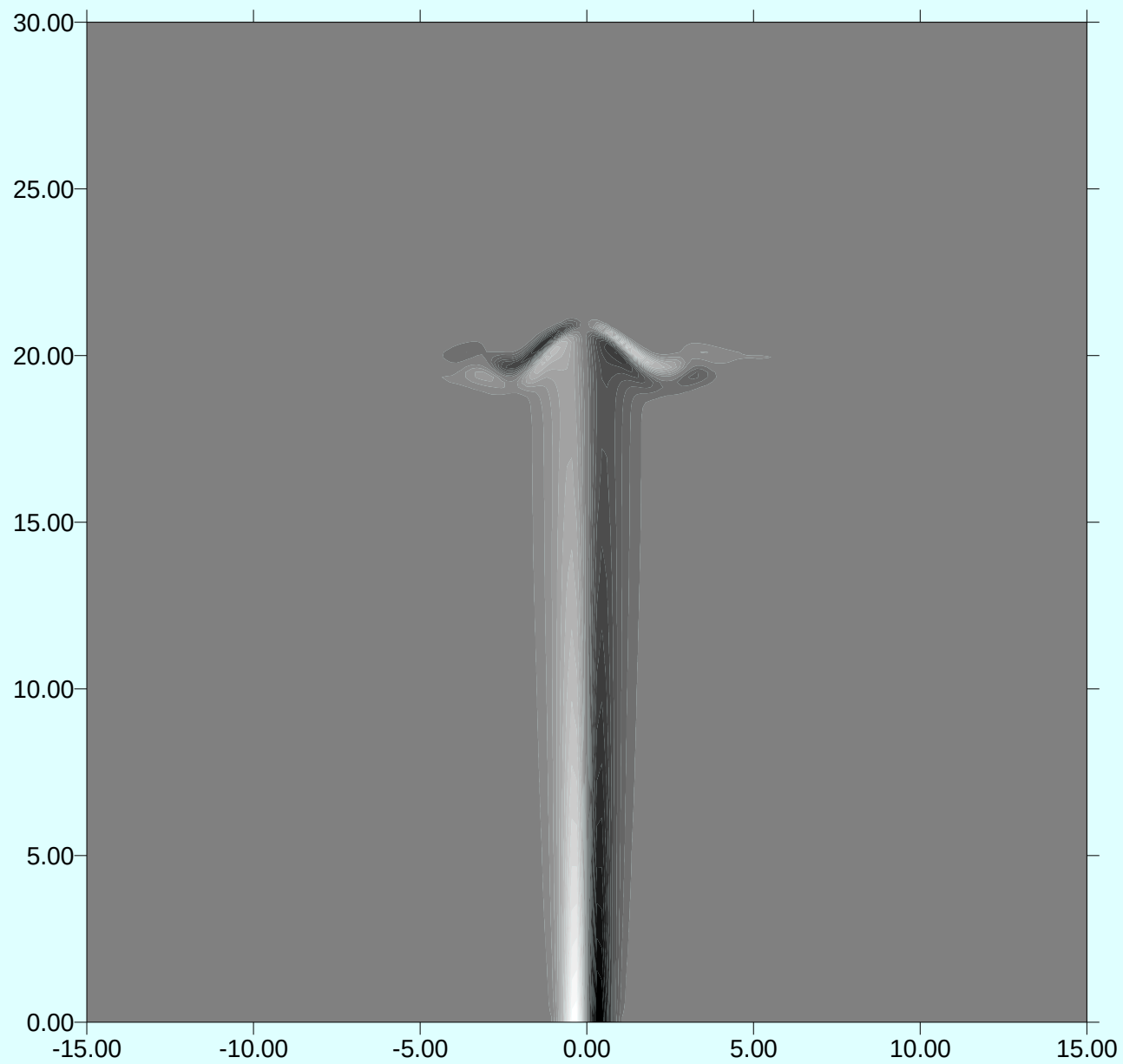


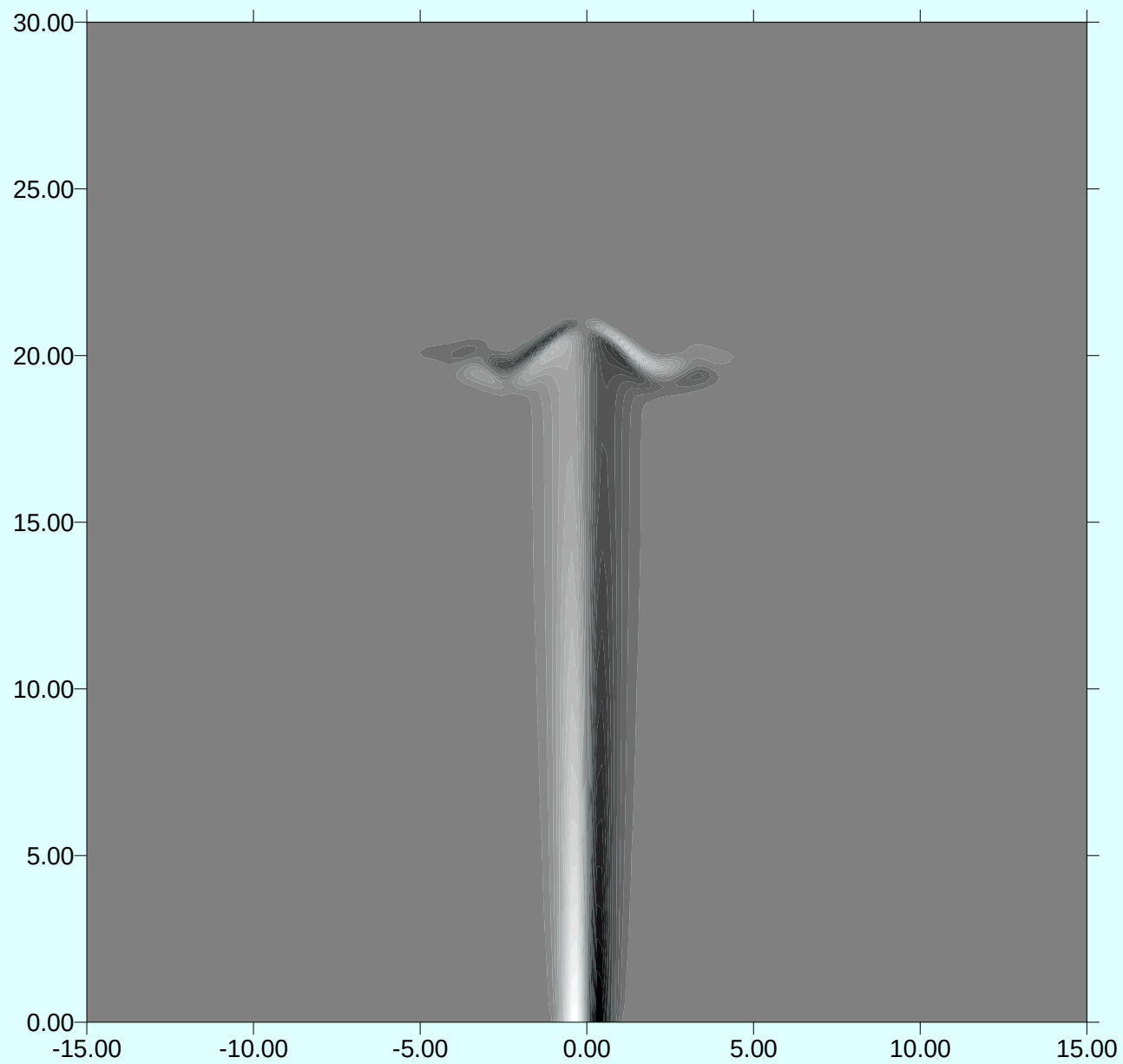


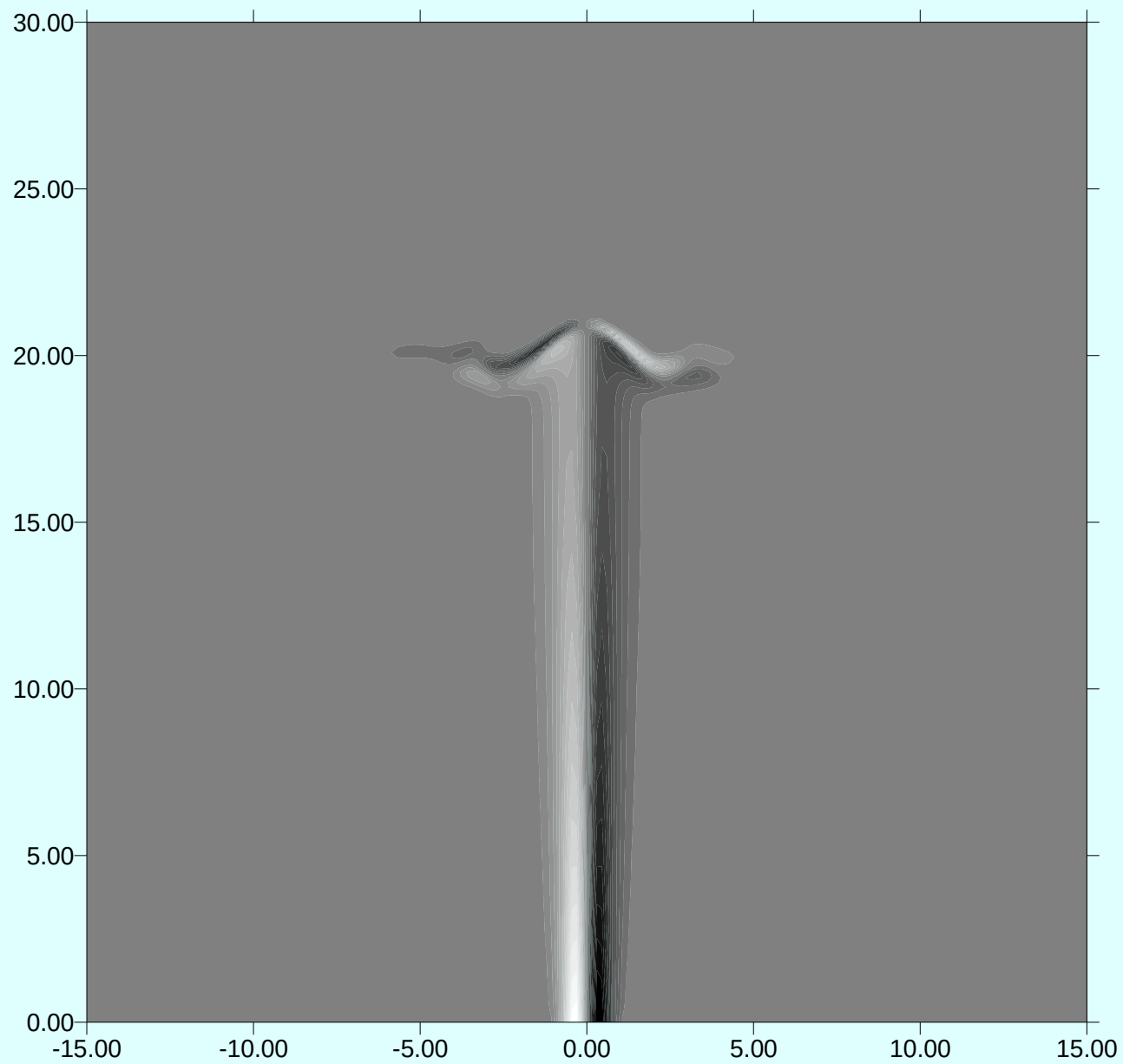


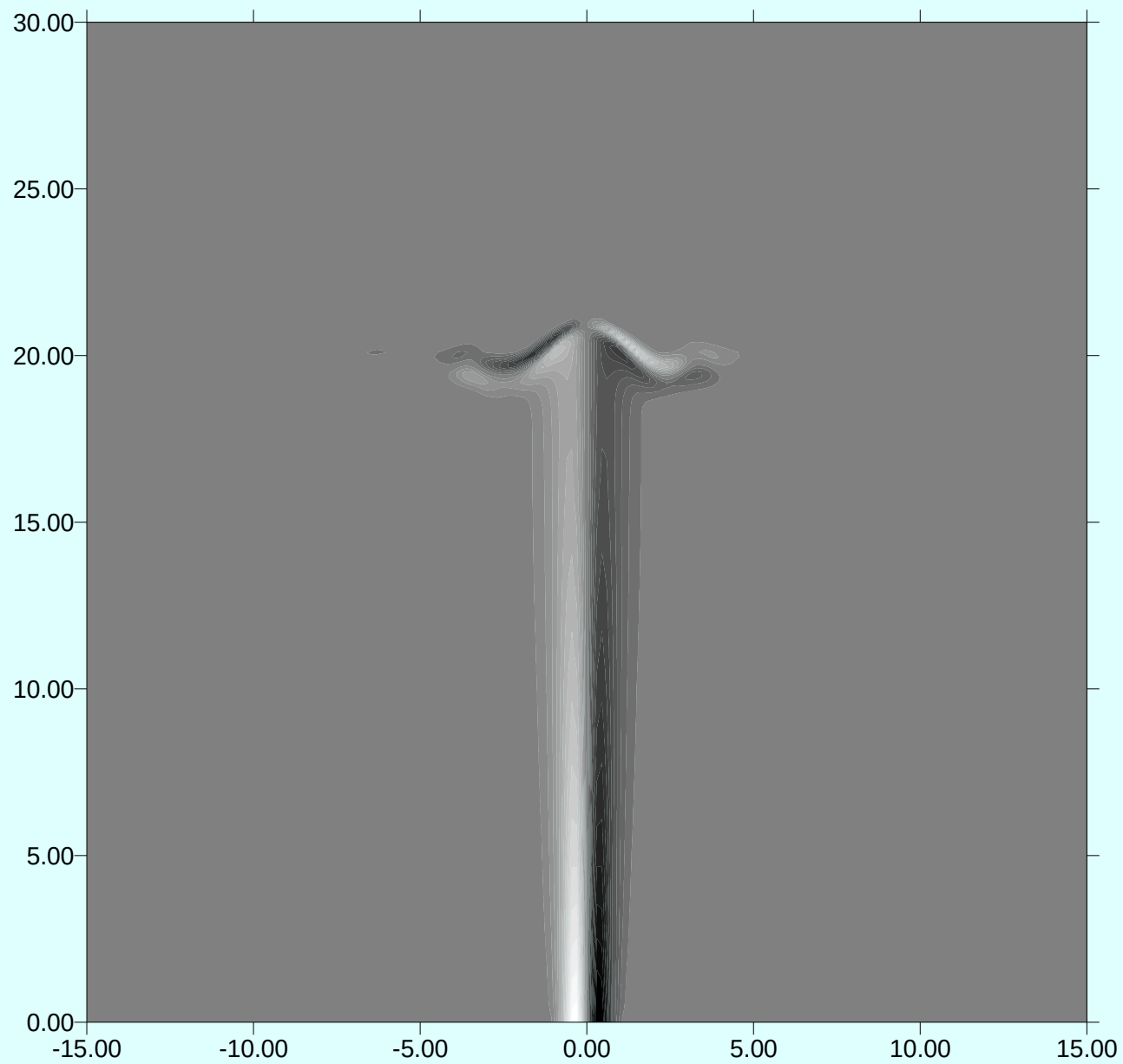


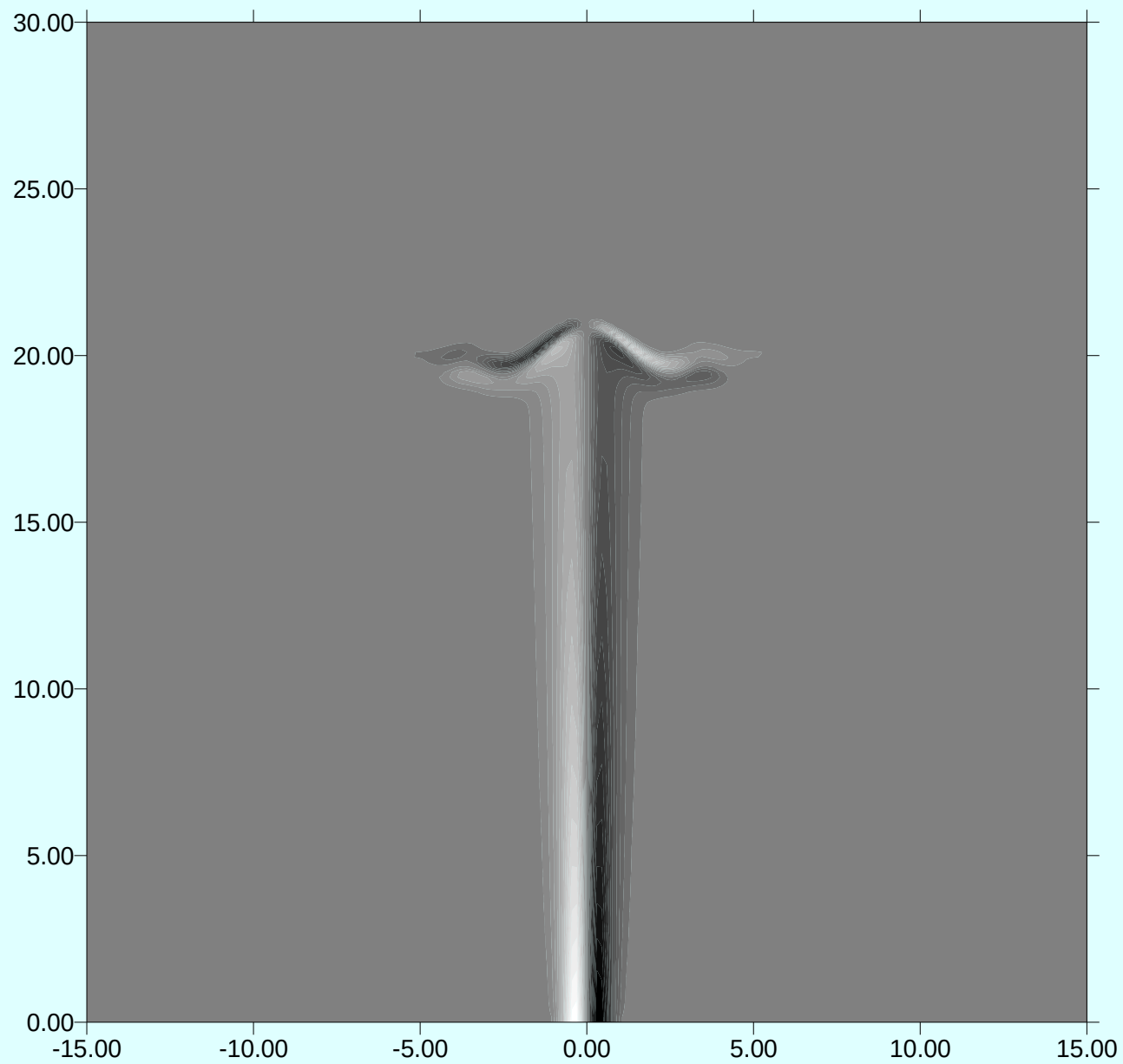


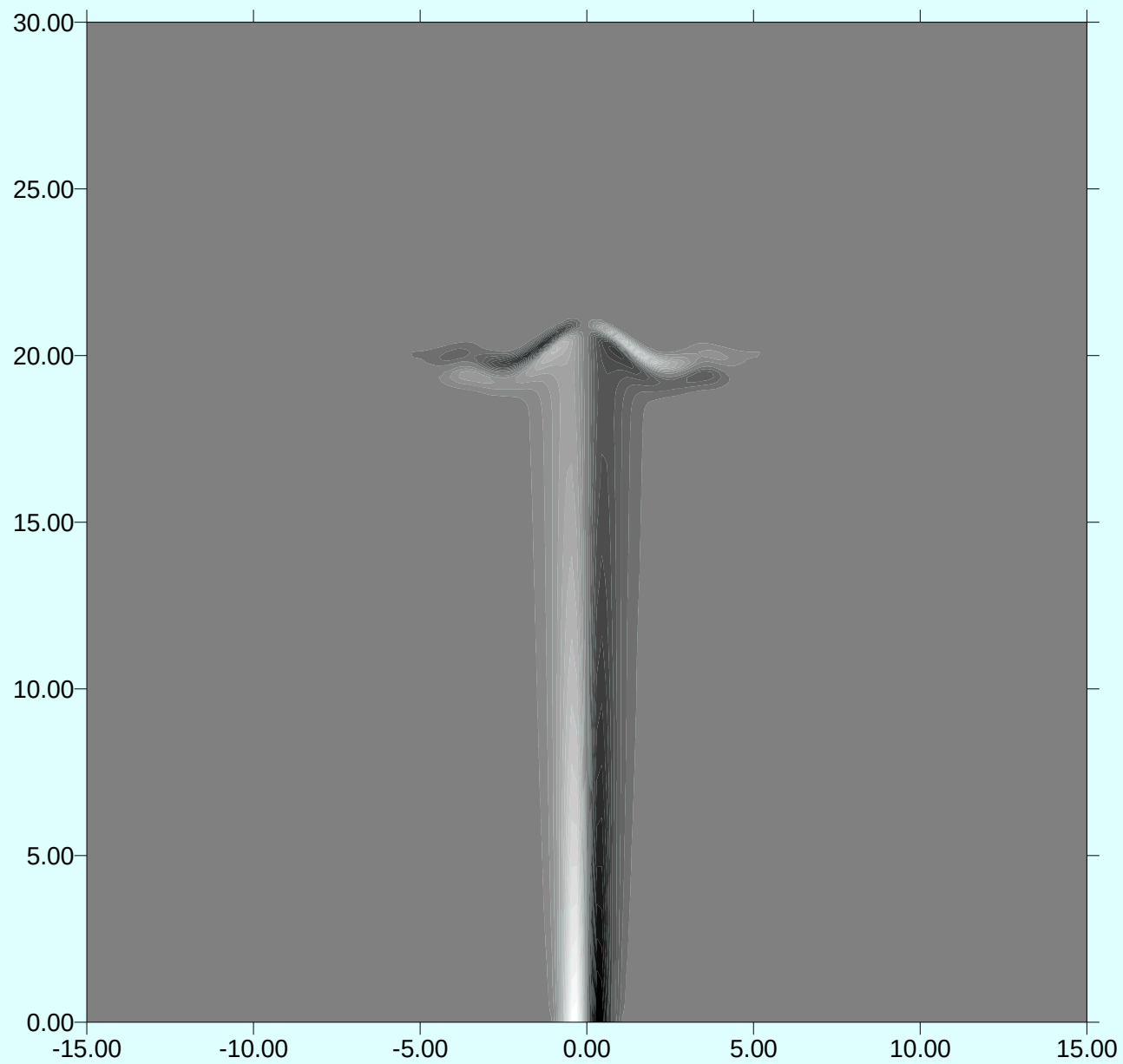




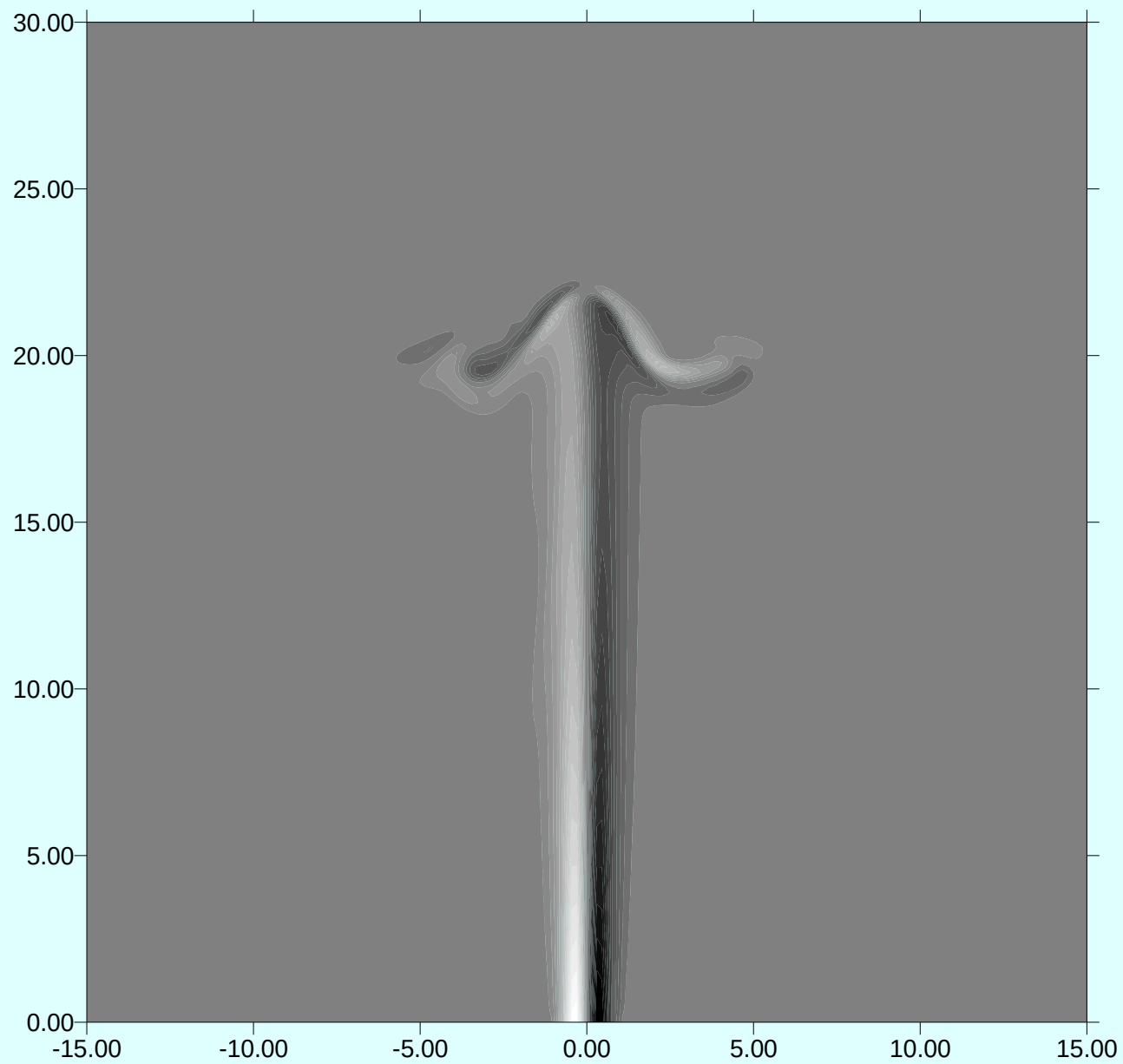


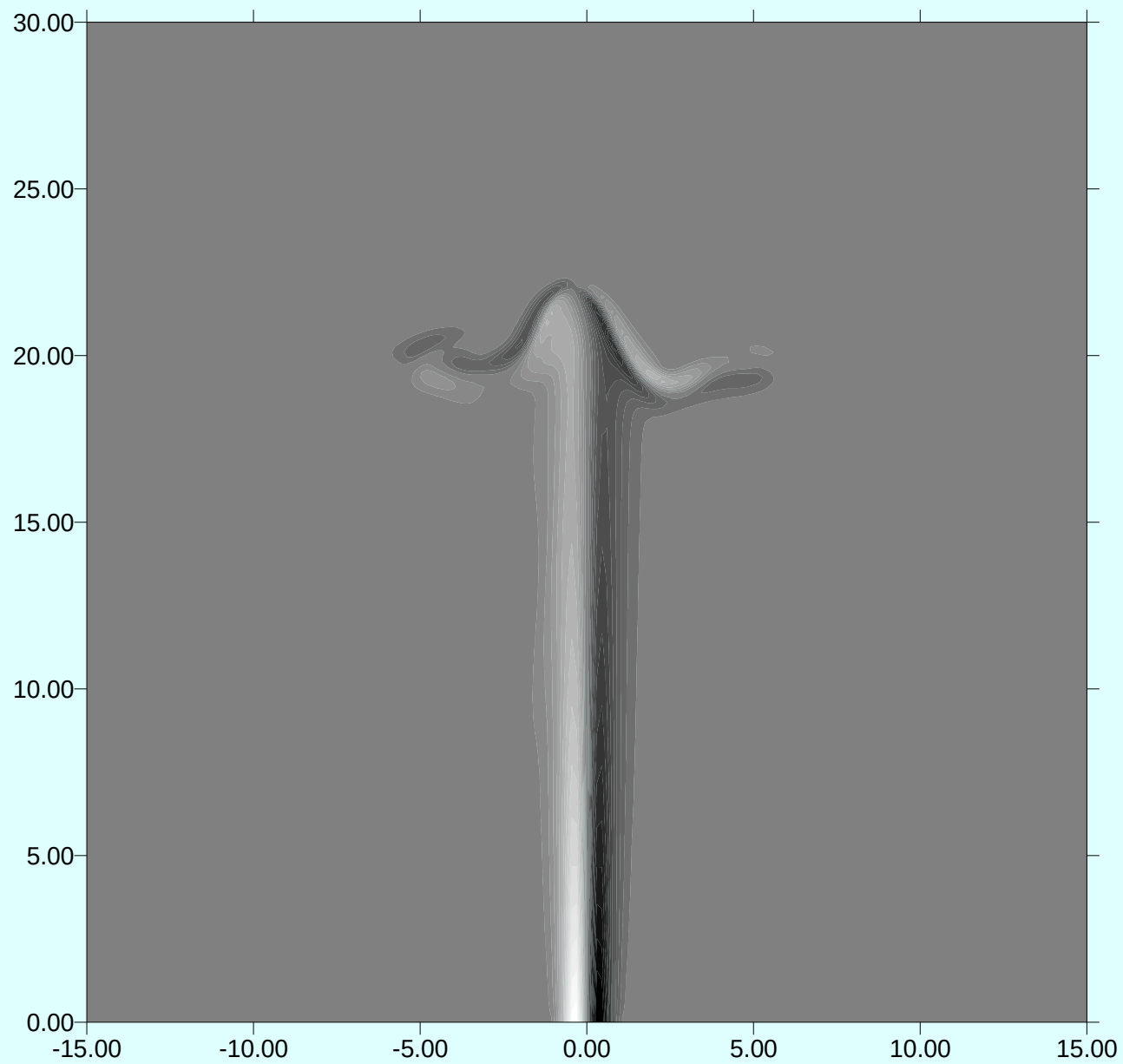


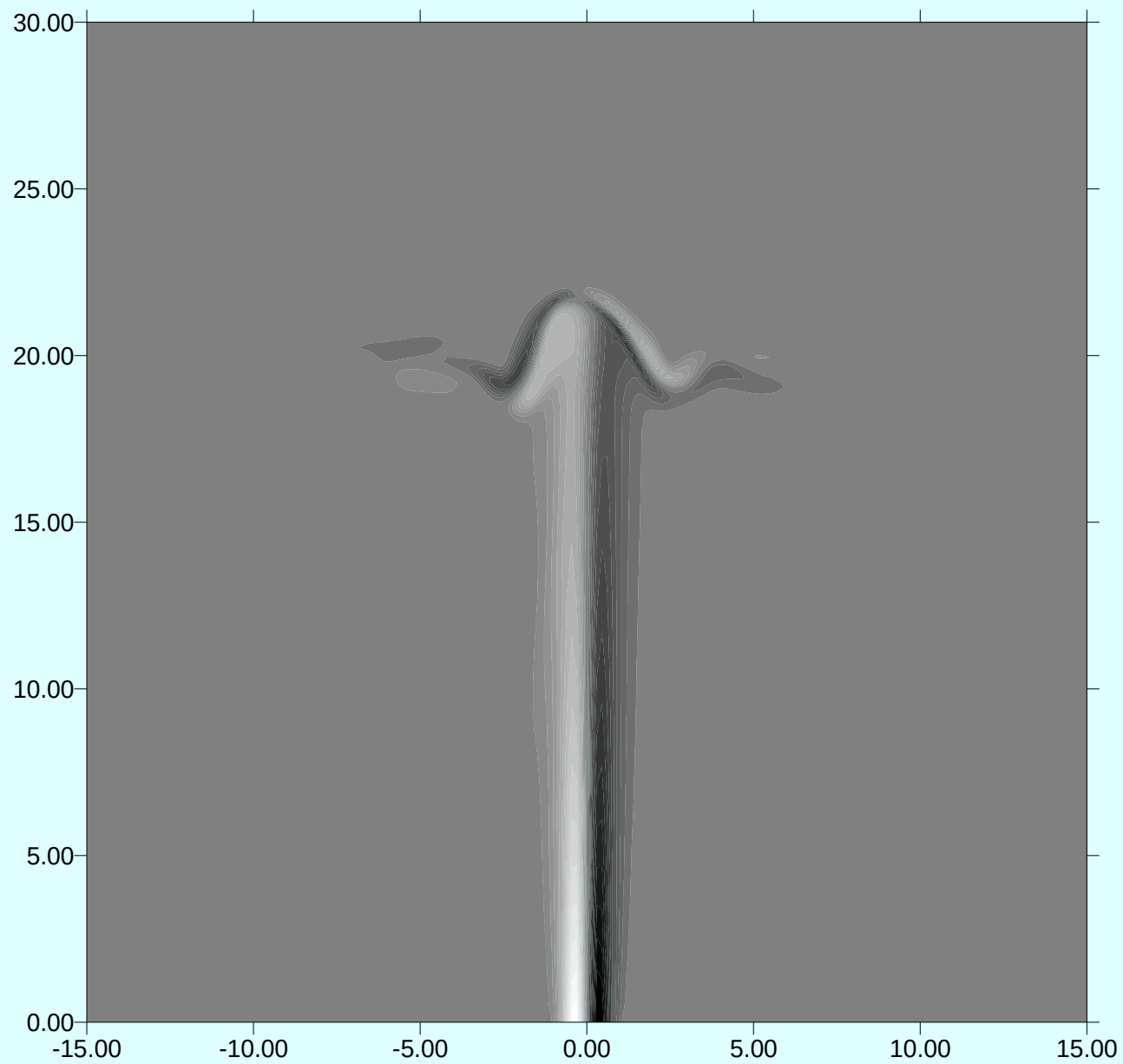


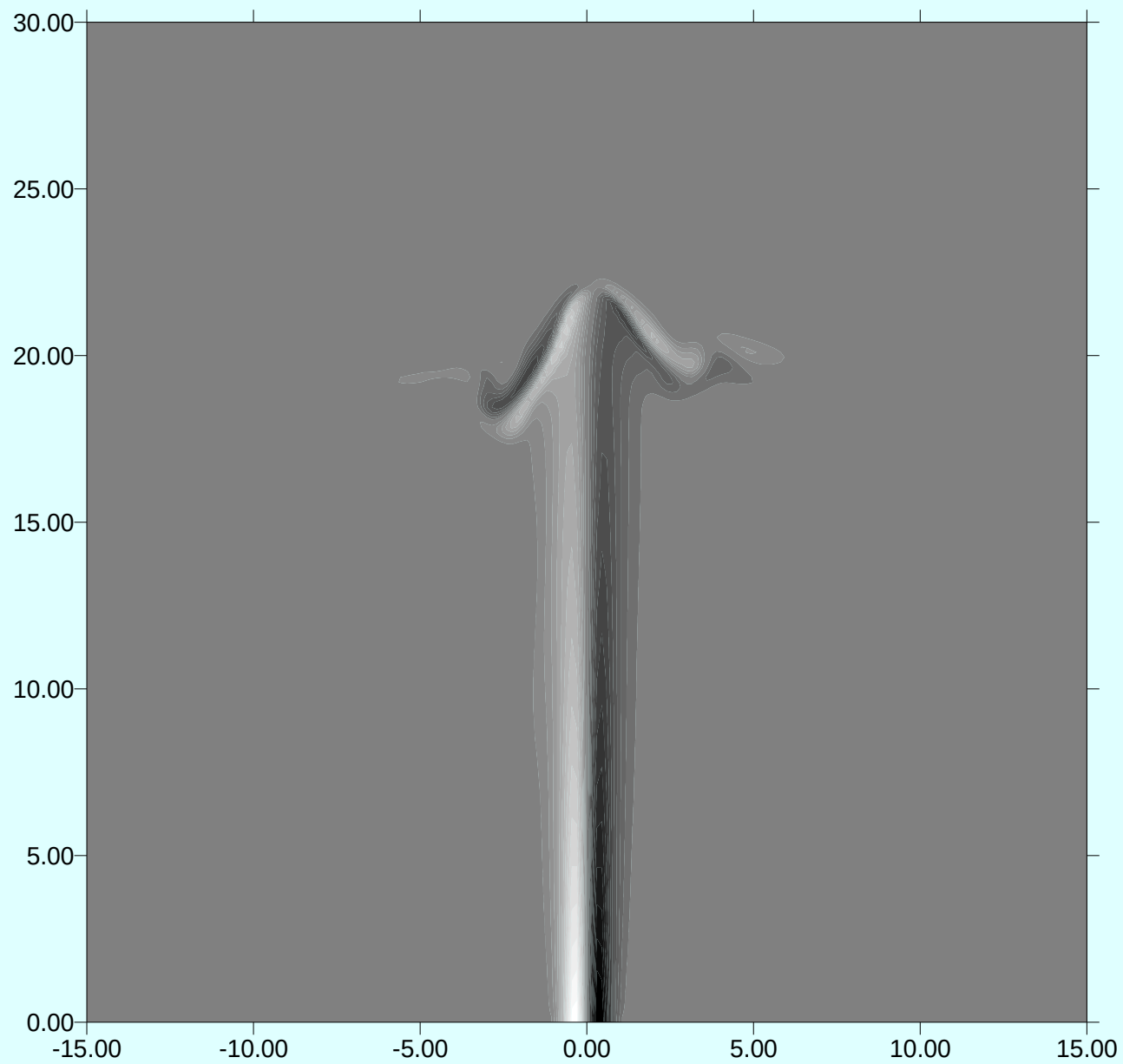


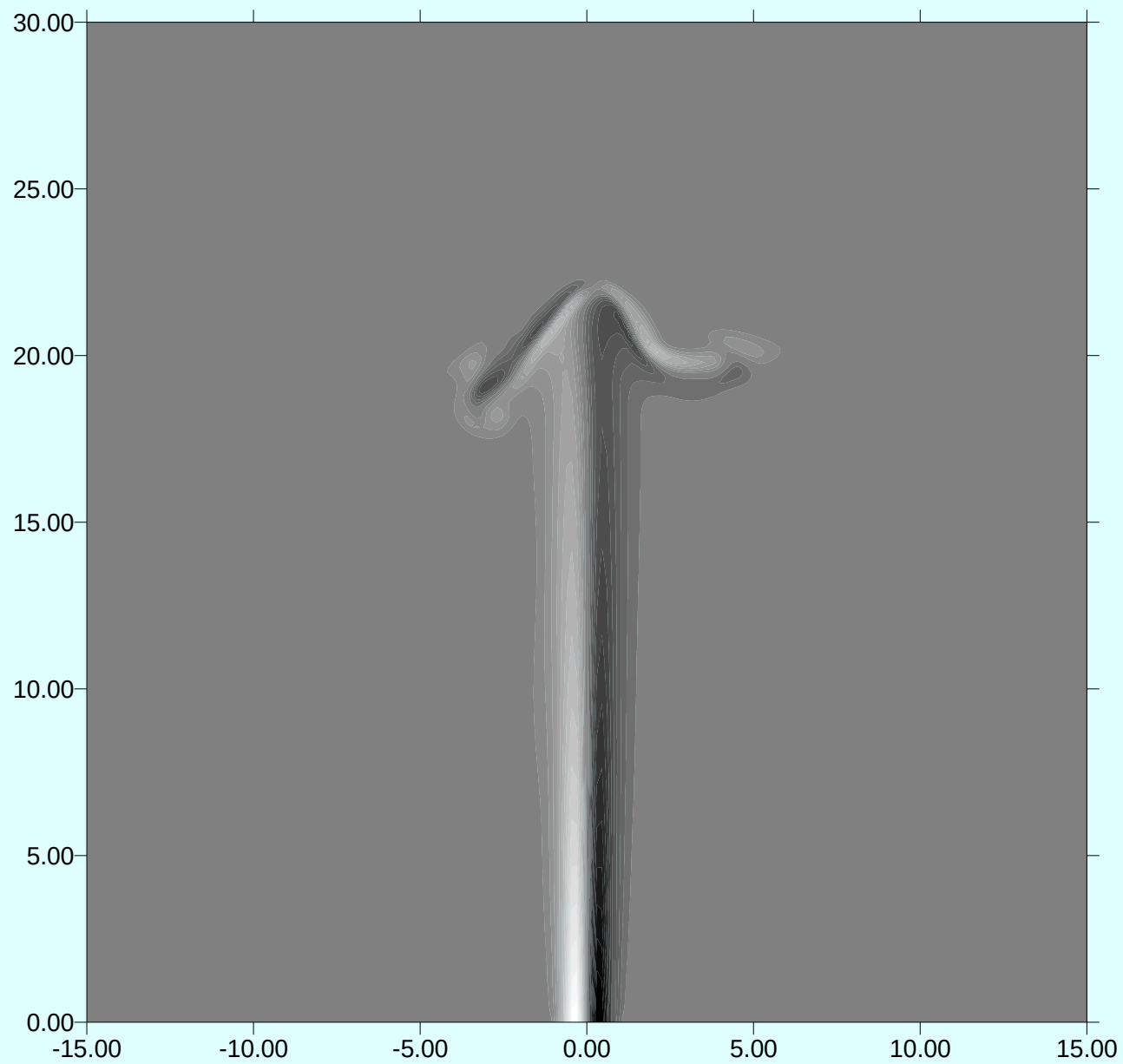
$$\text{Fr} = 4.0$$

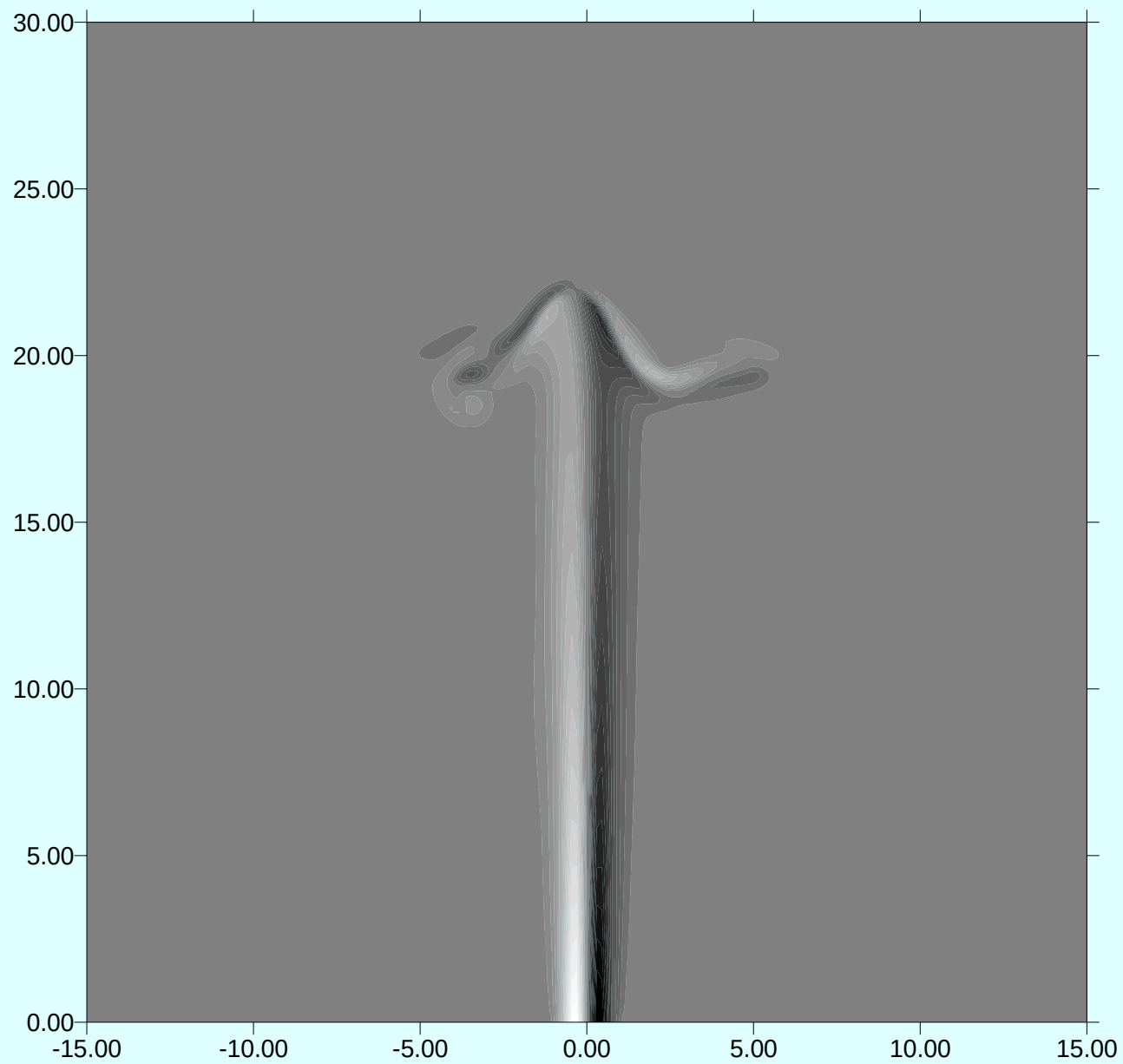


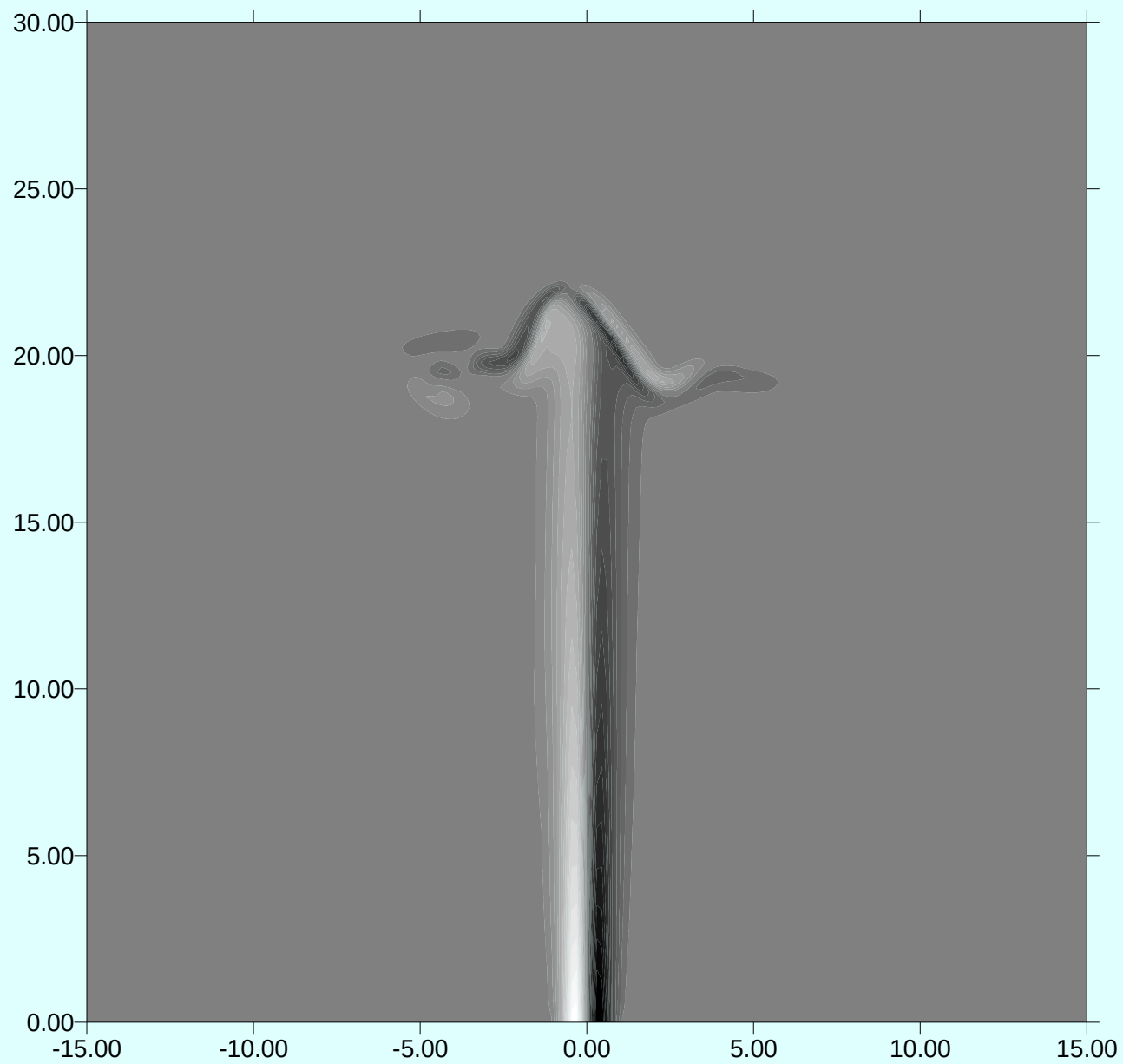


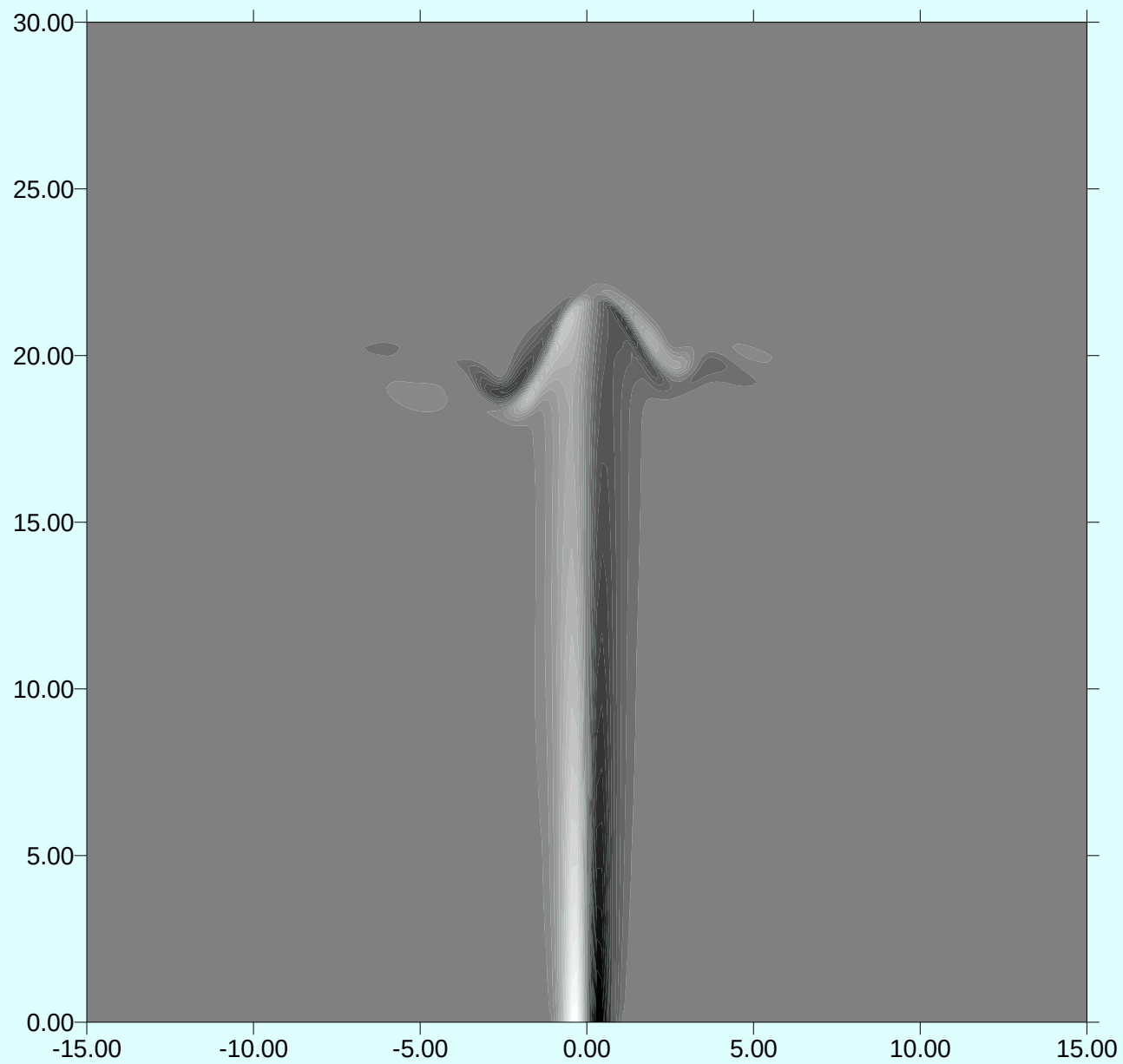


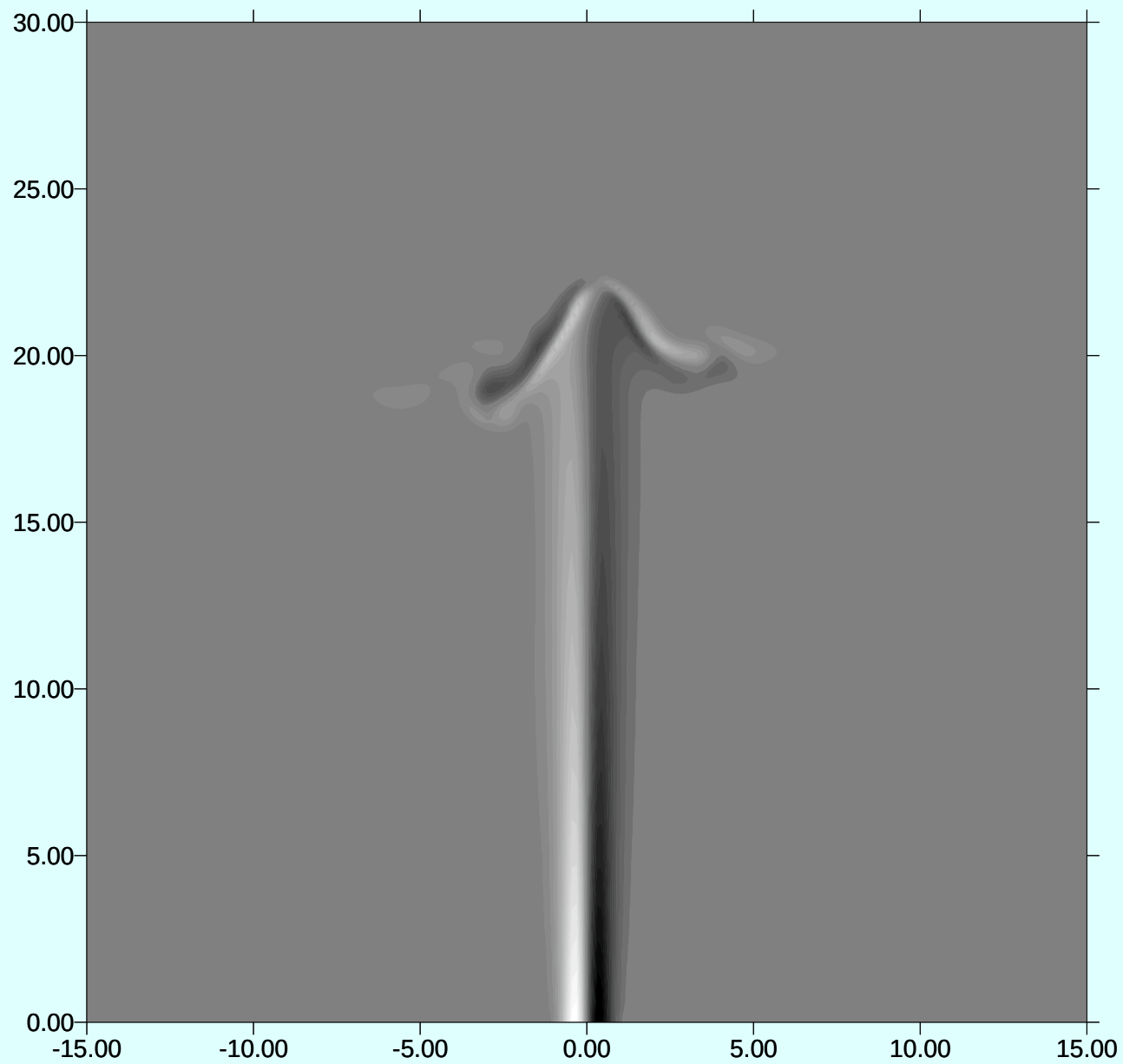


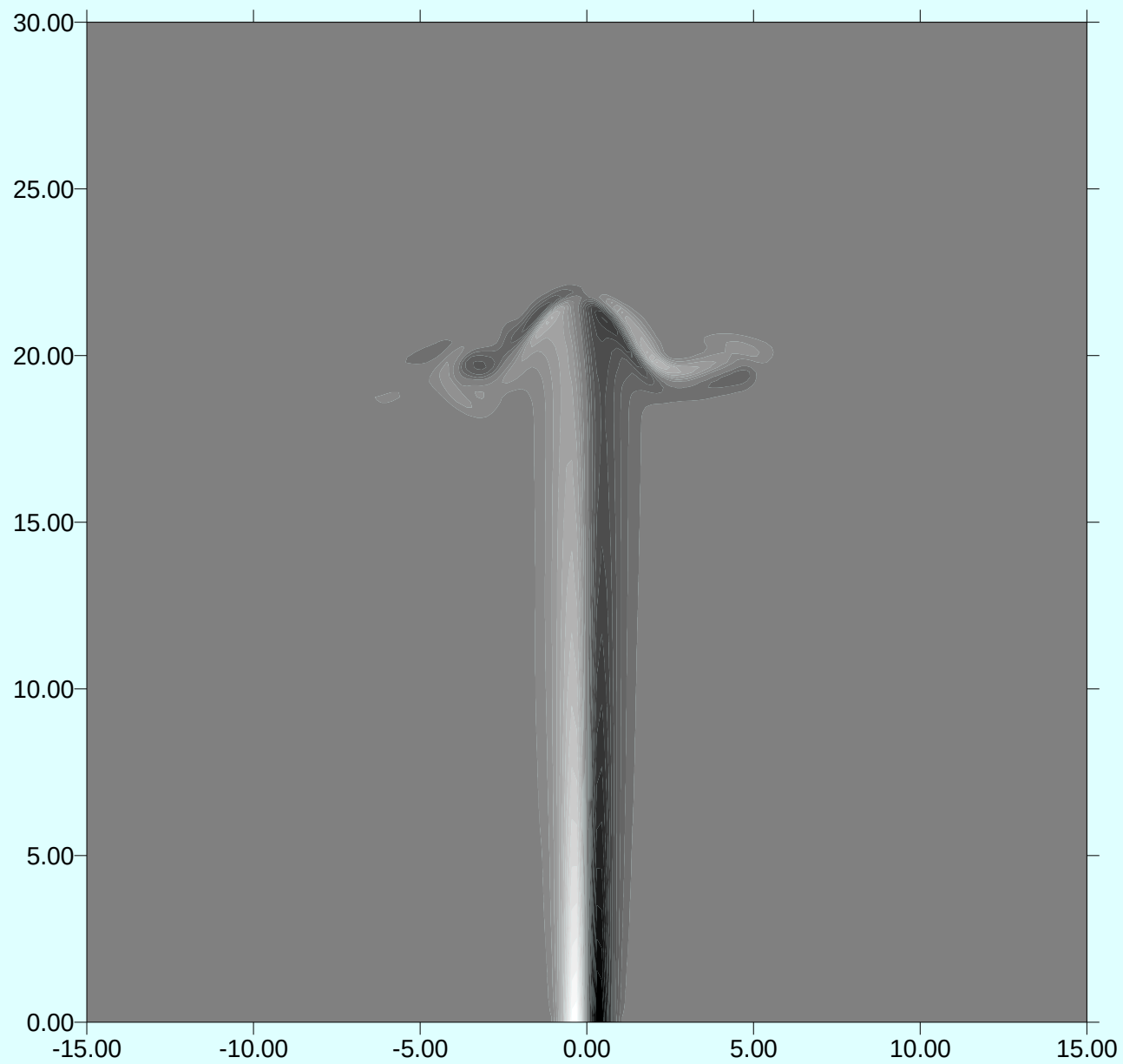


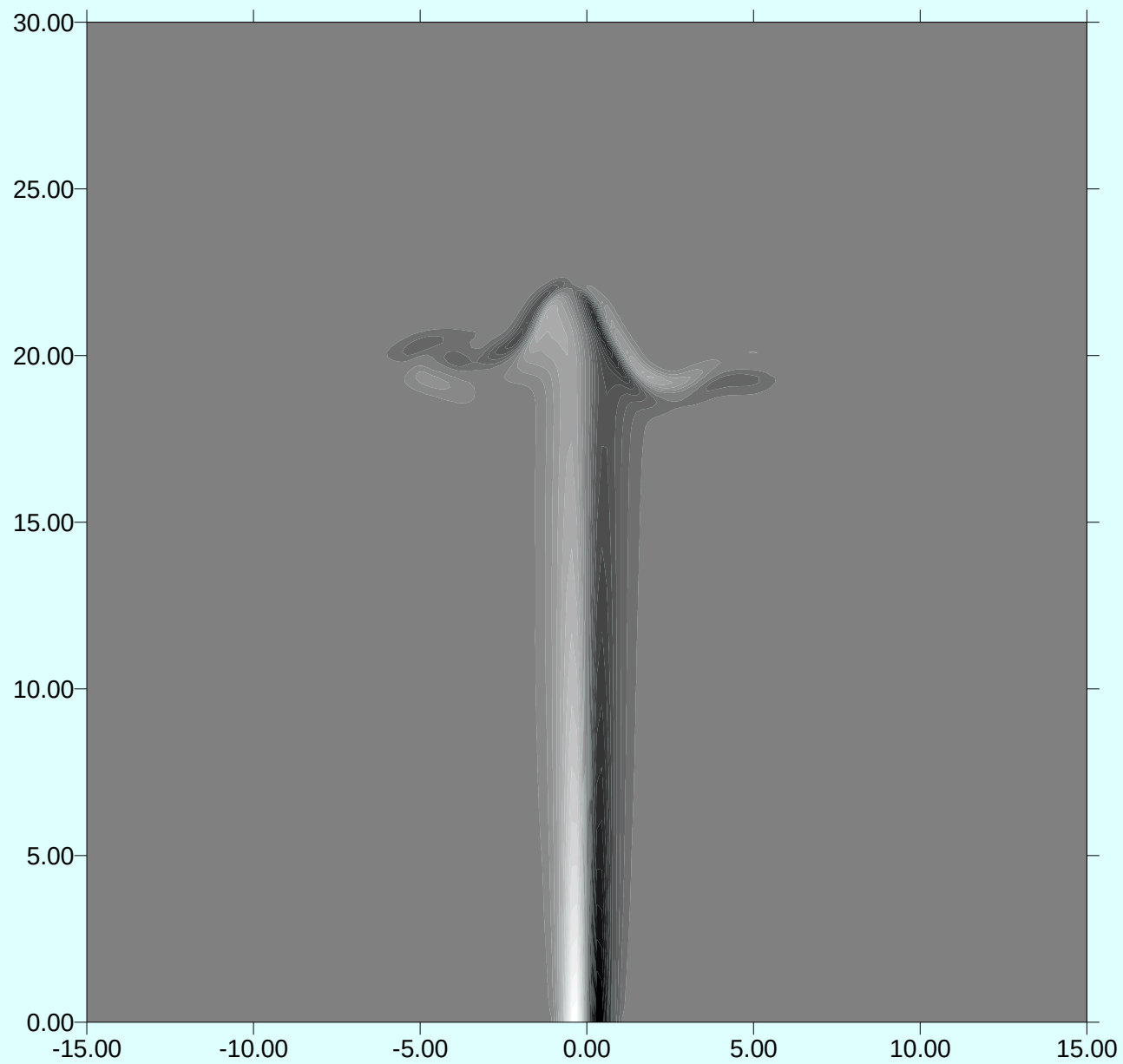


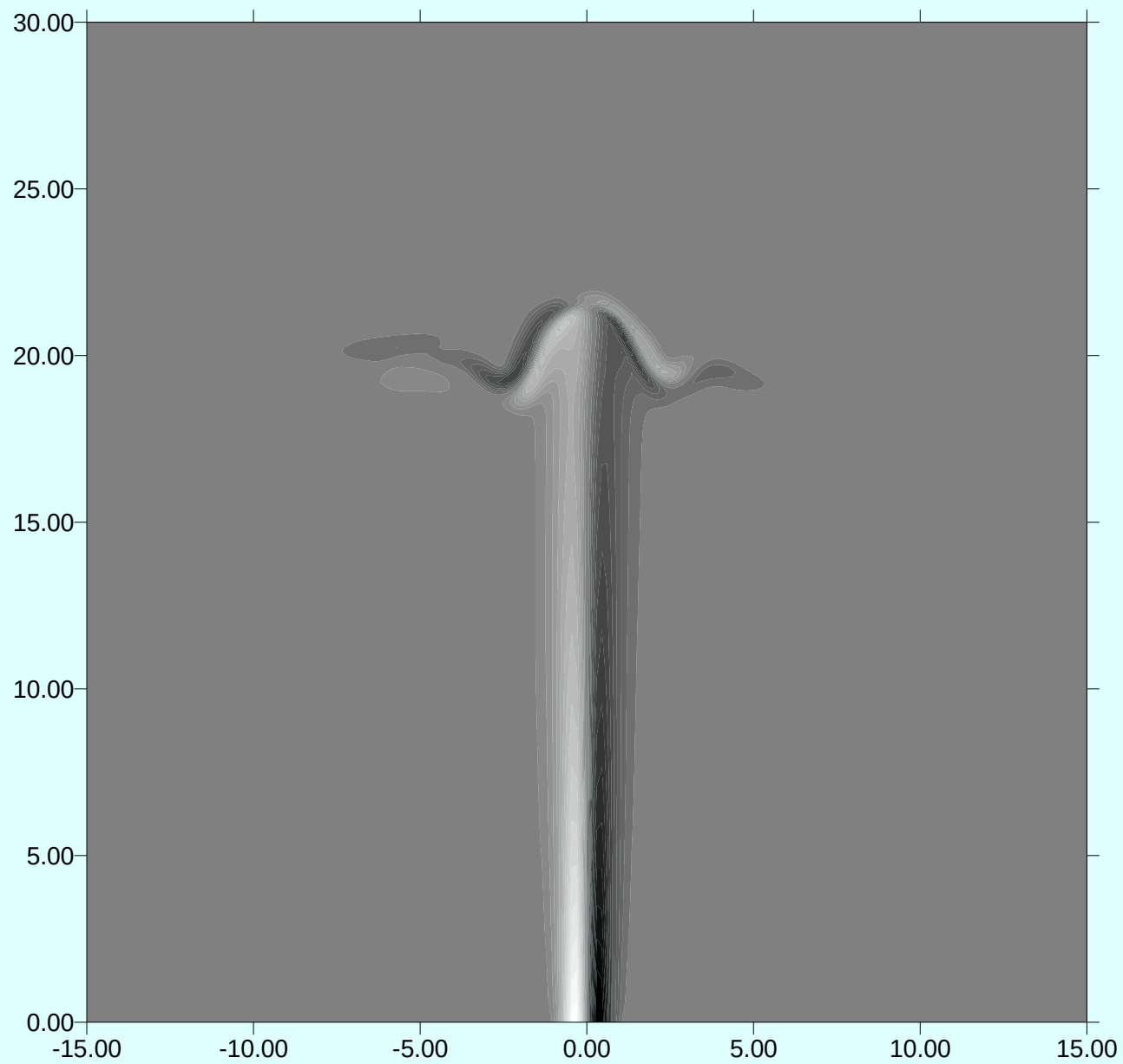


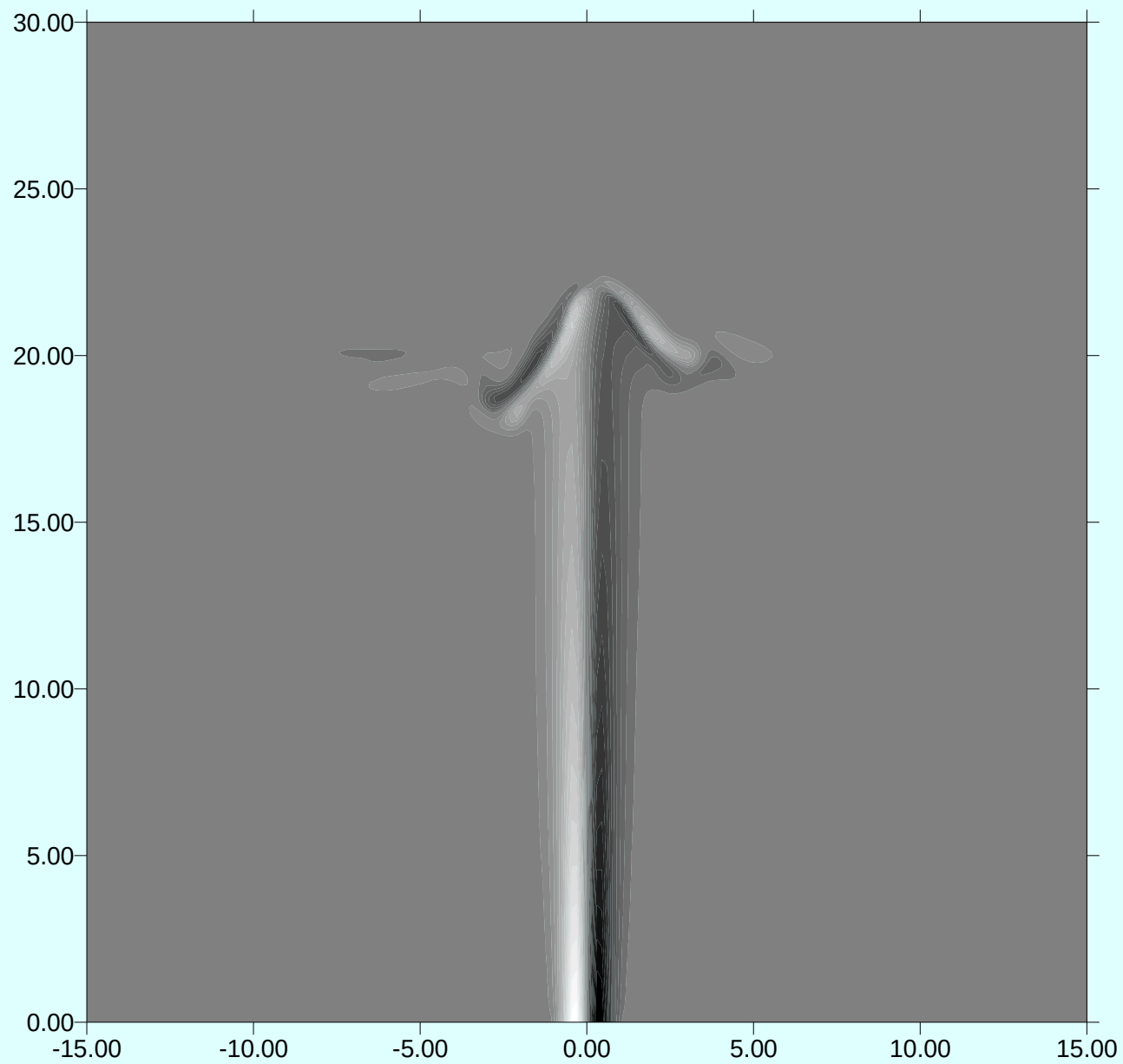


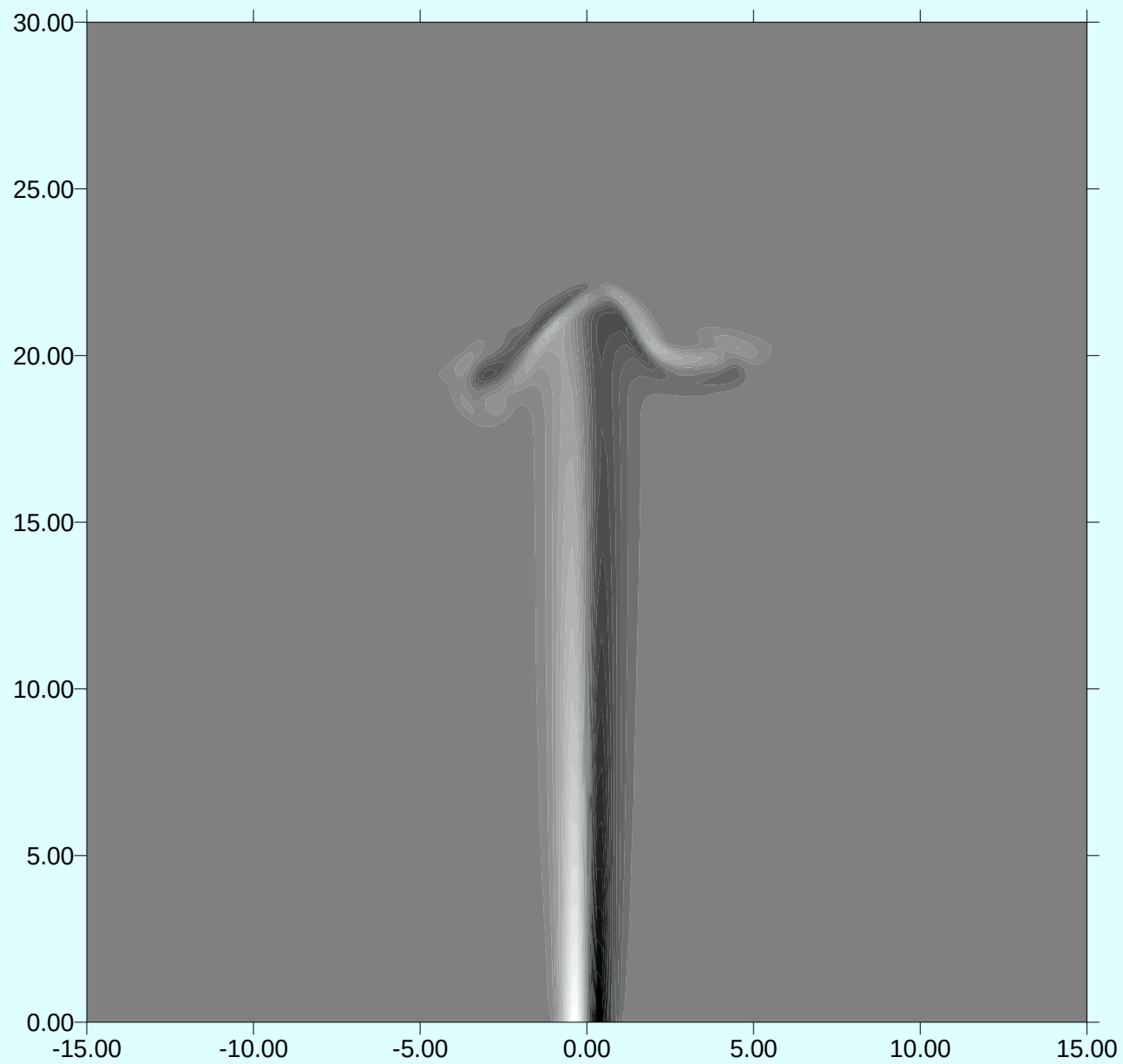


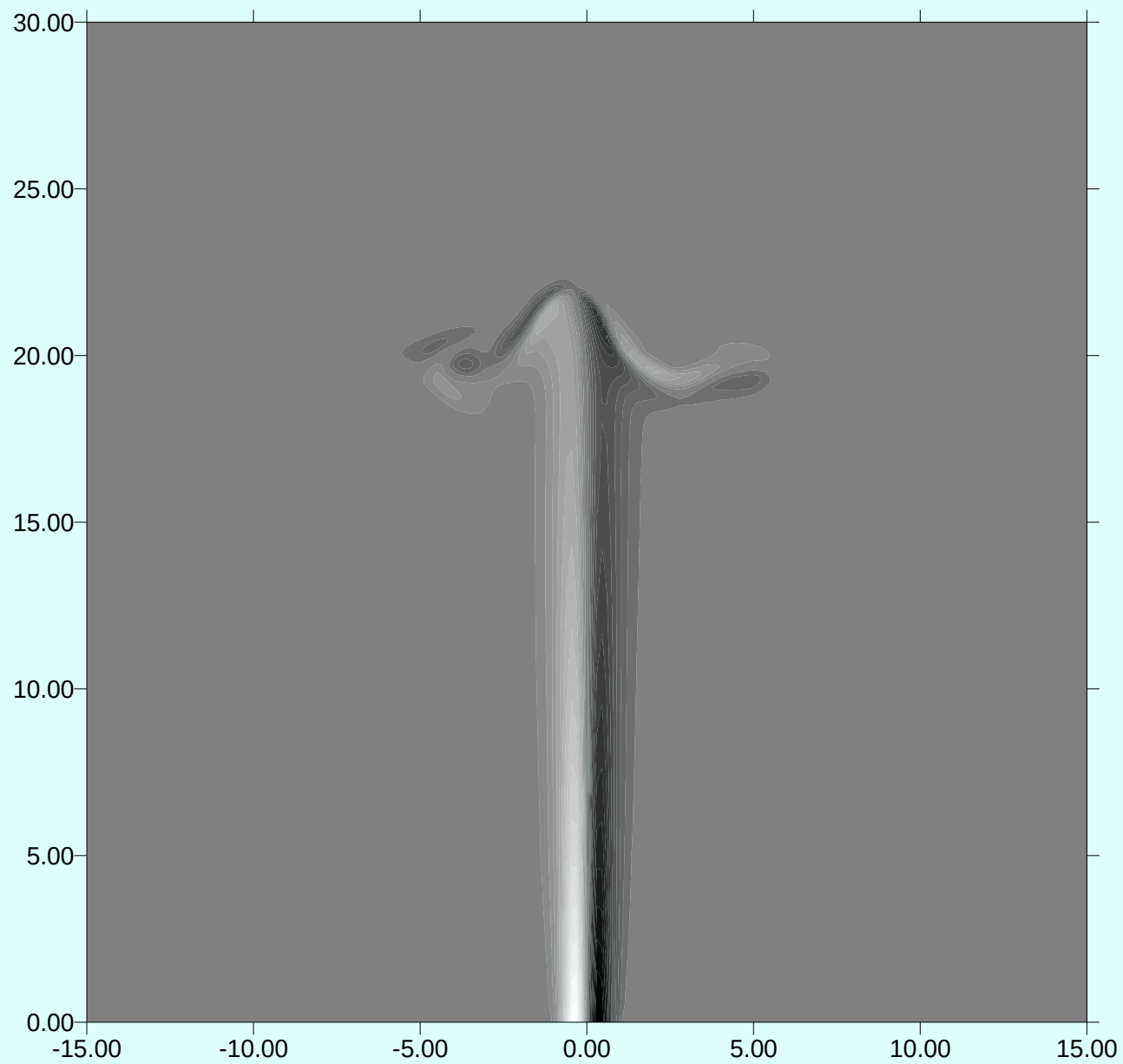




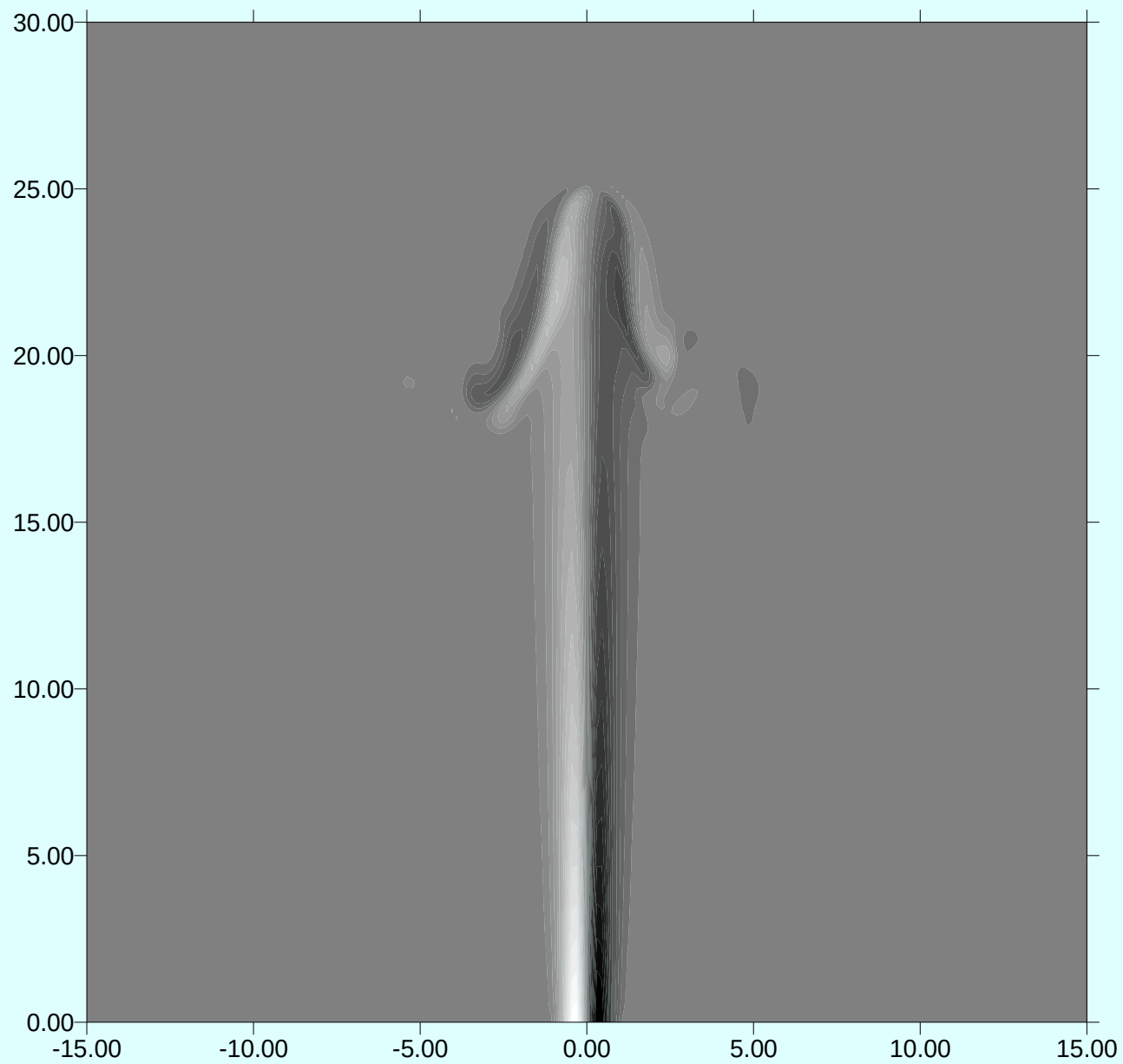


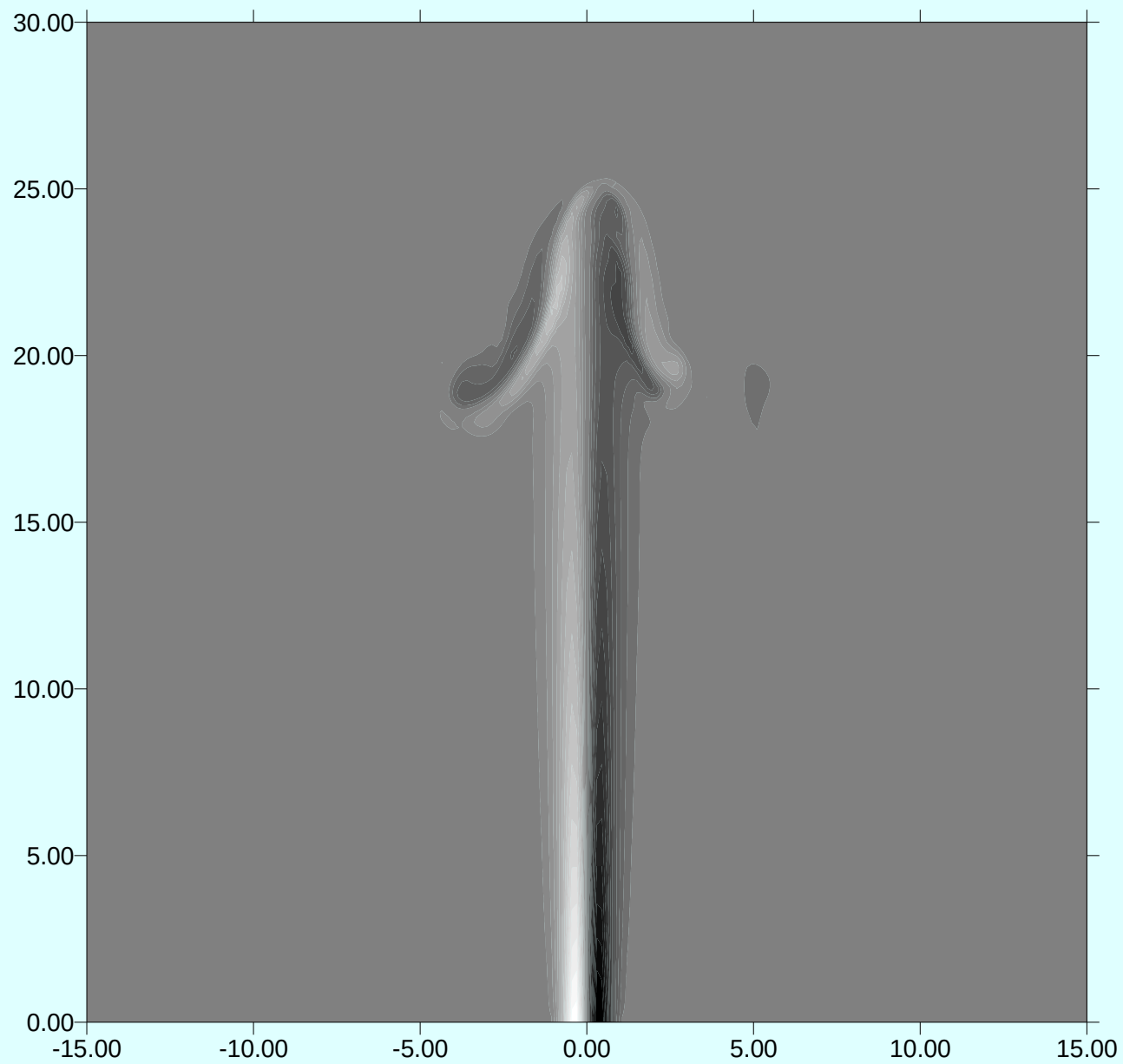


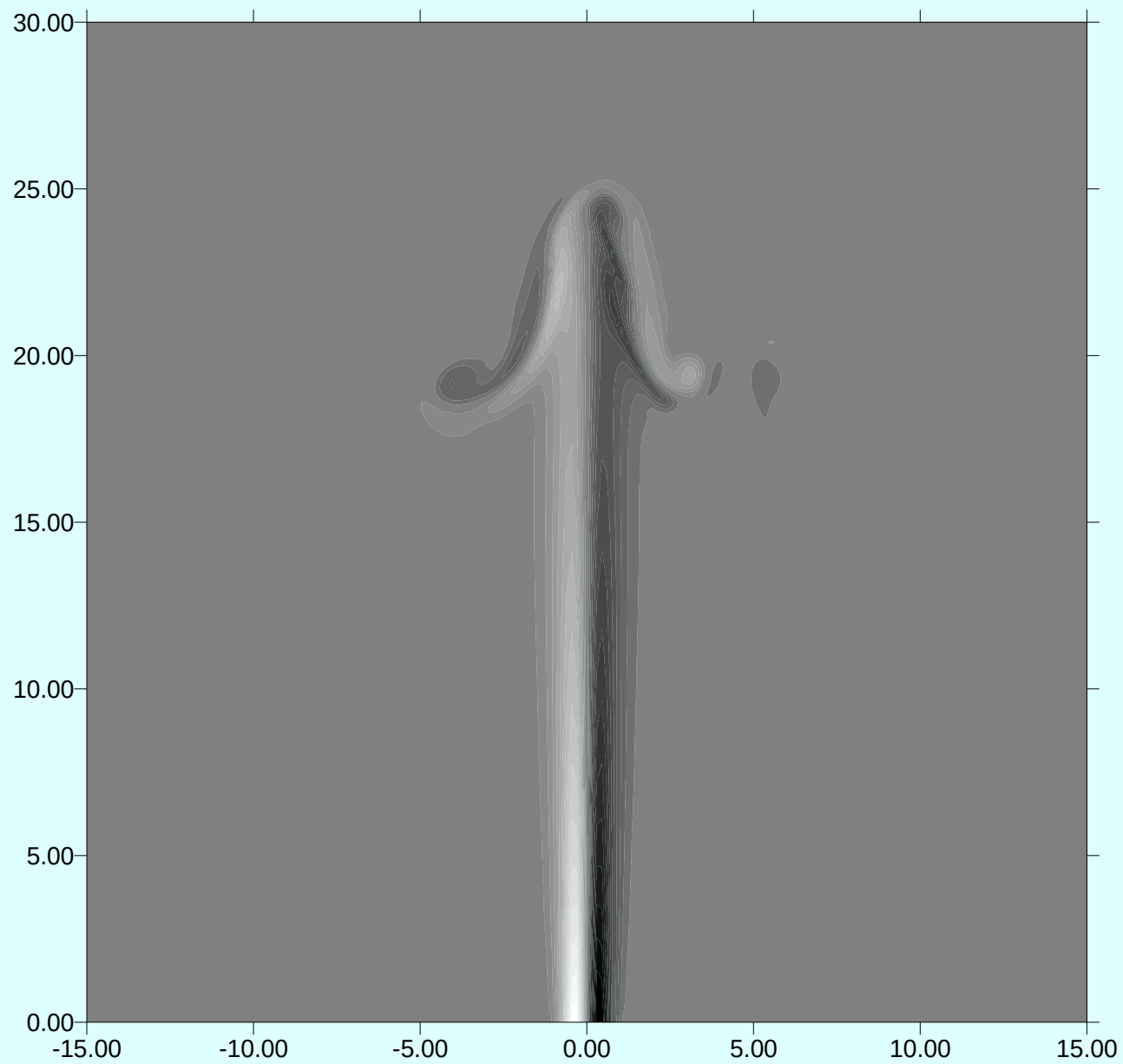


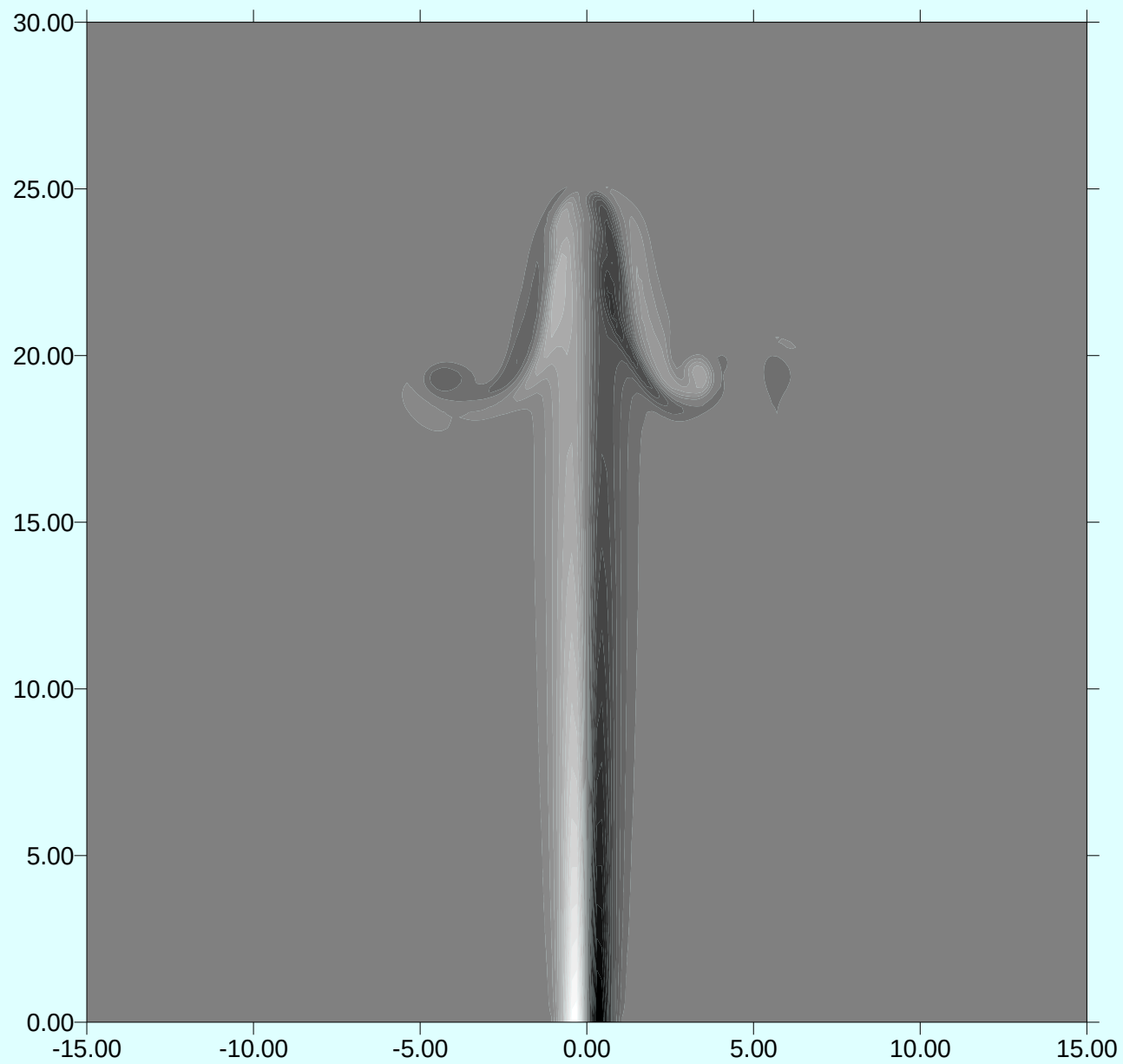


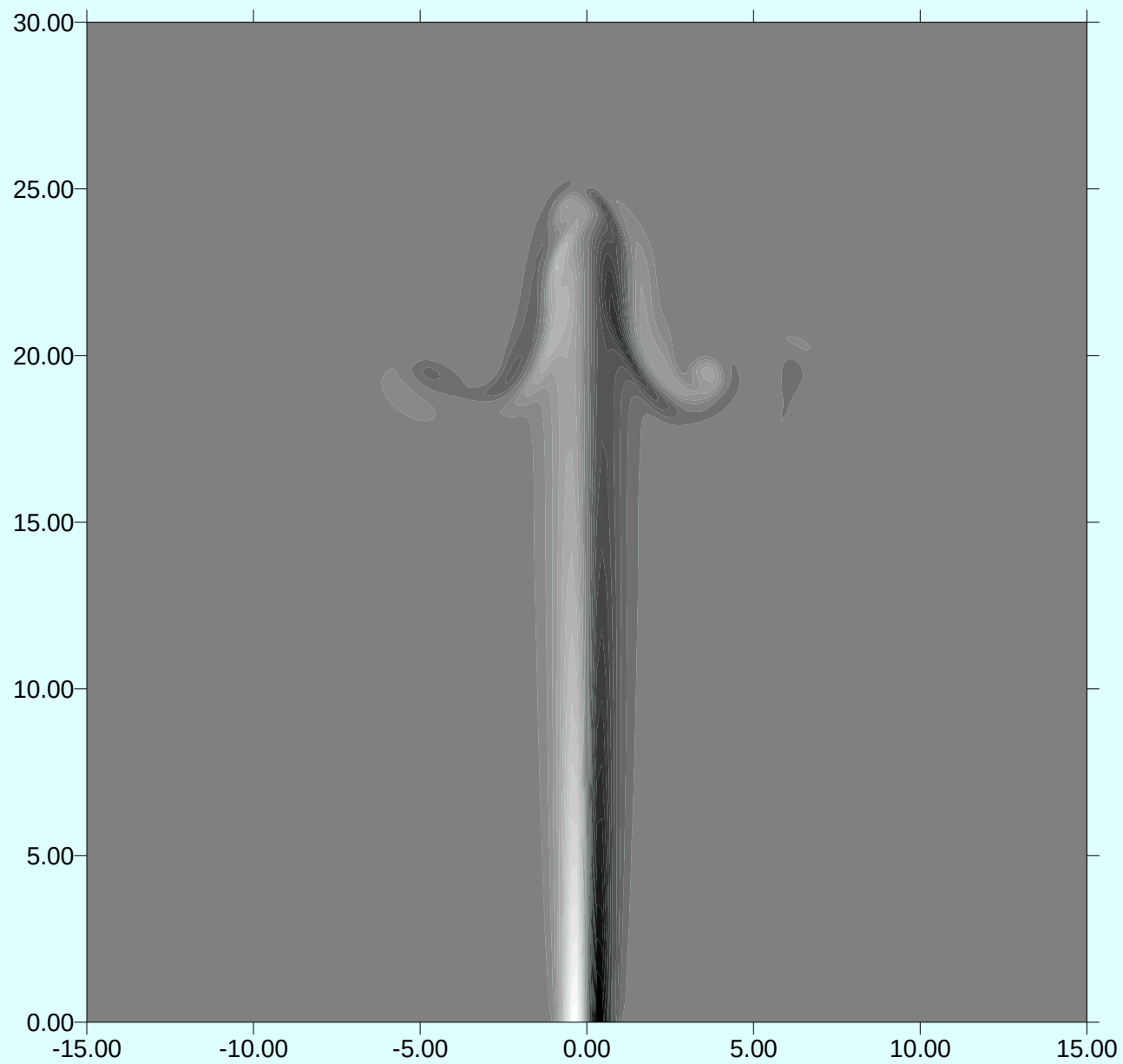
$$\text{Fr} = 7.0$$

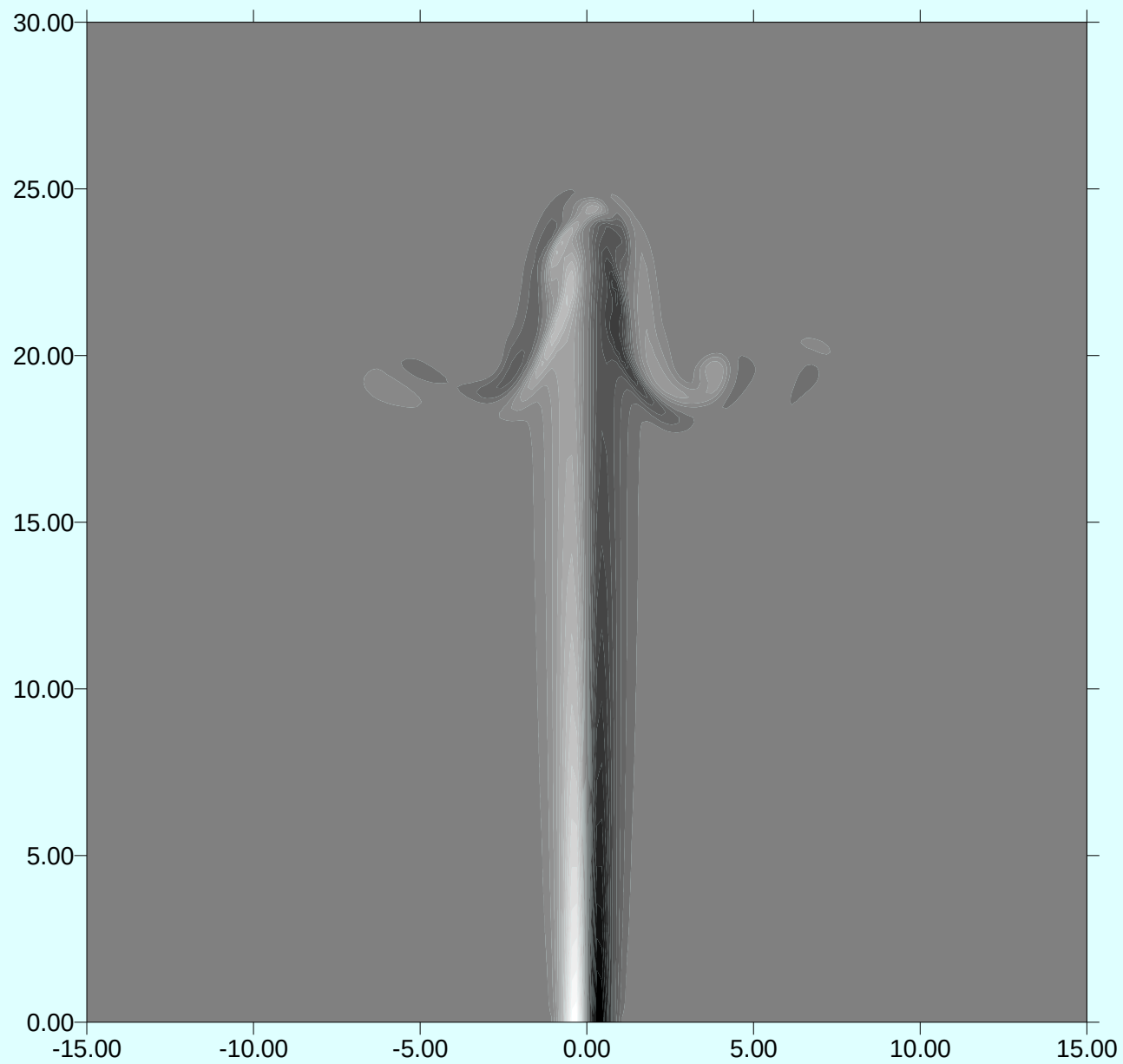


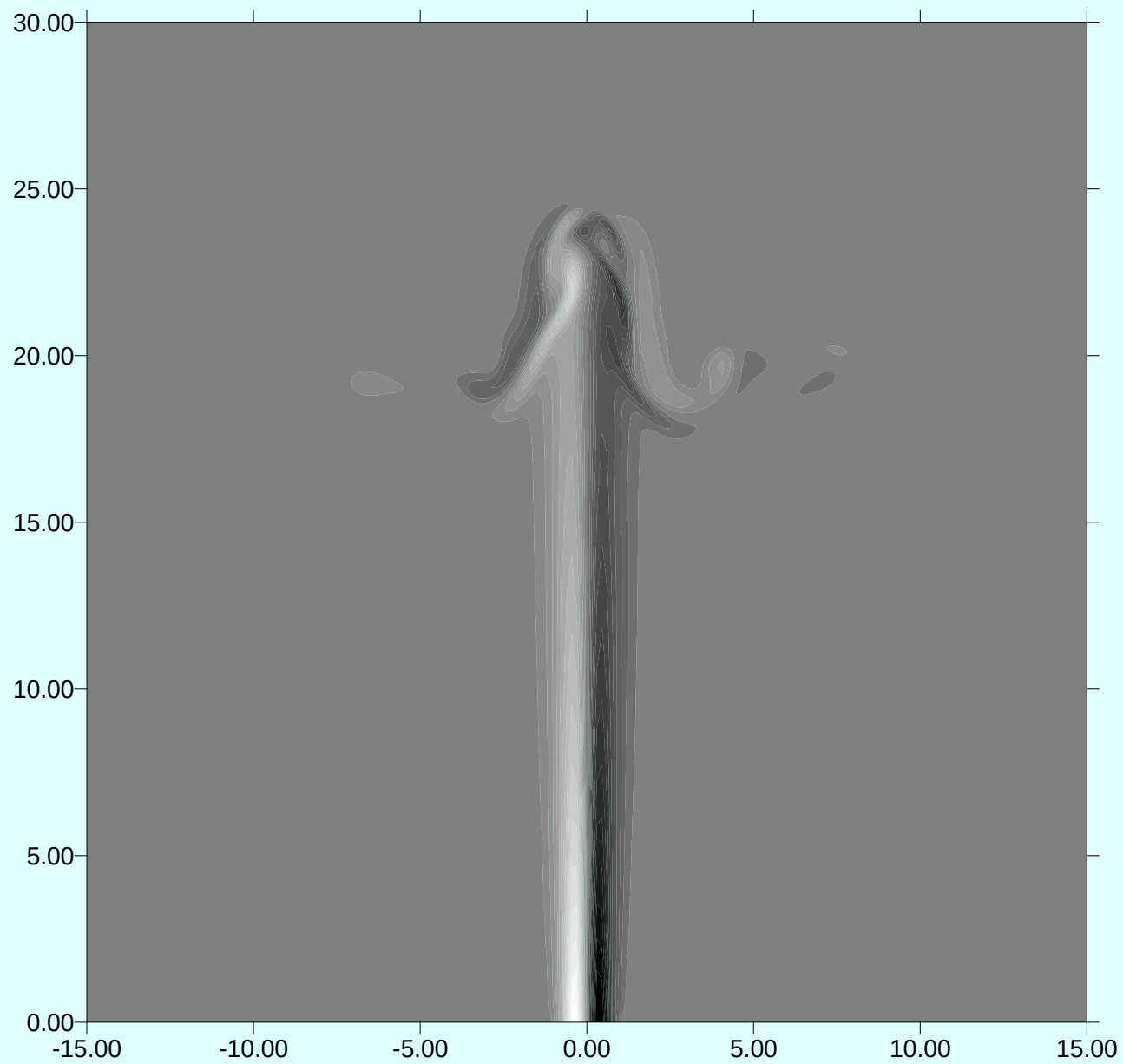


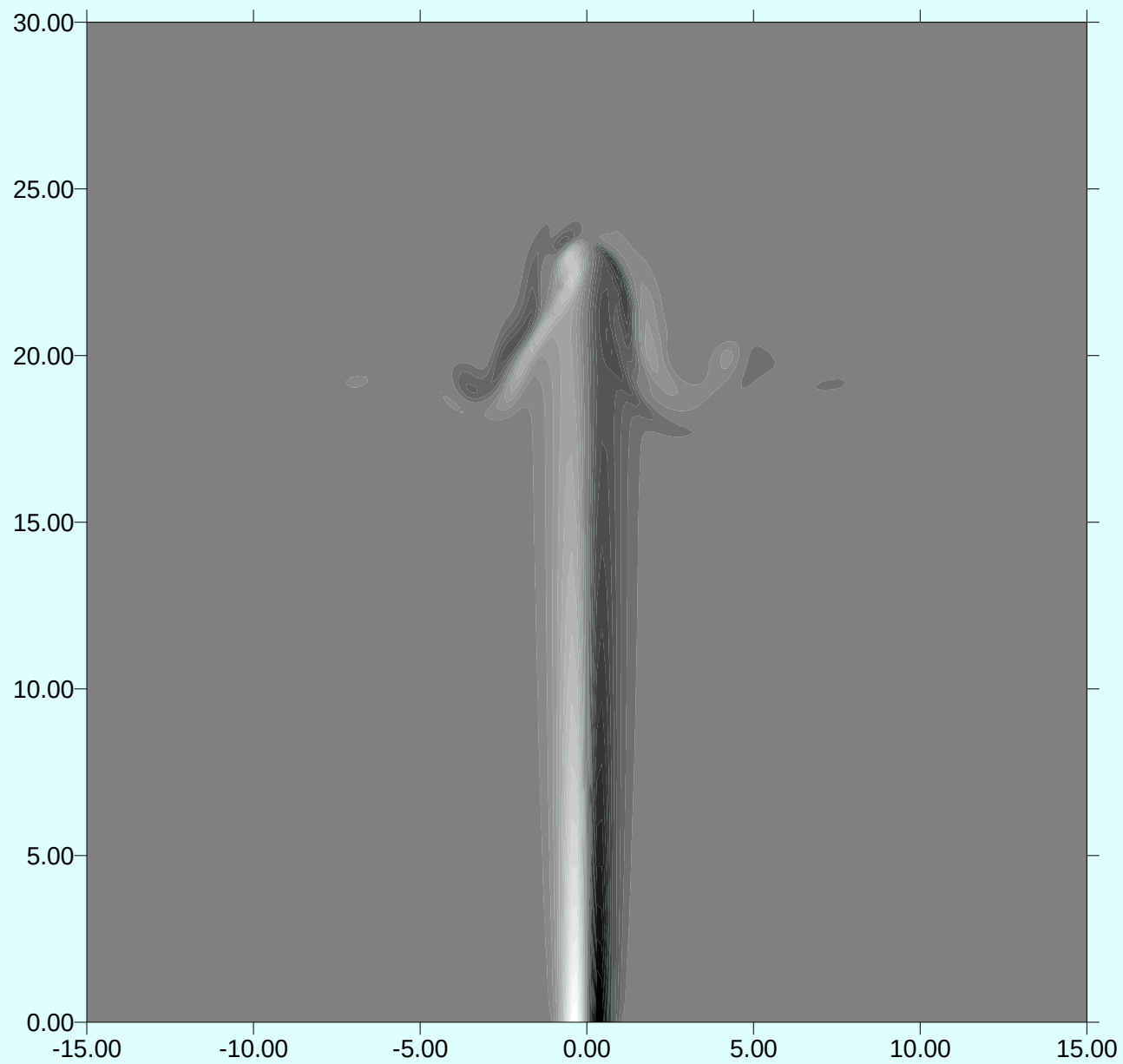


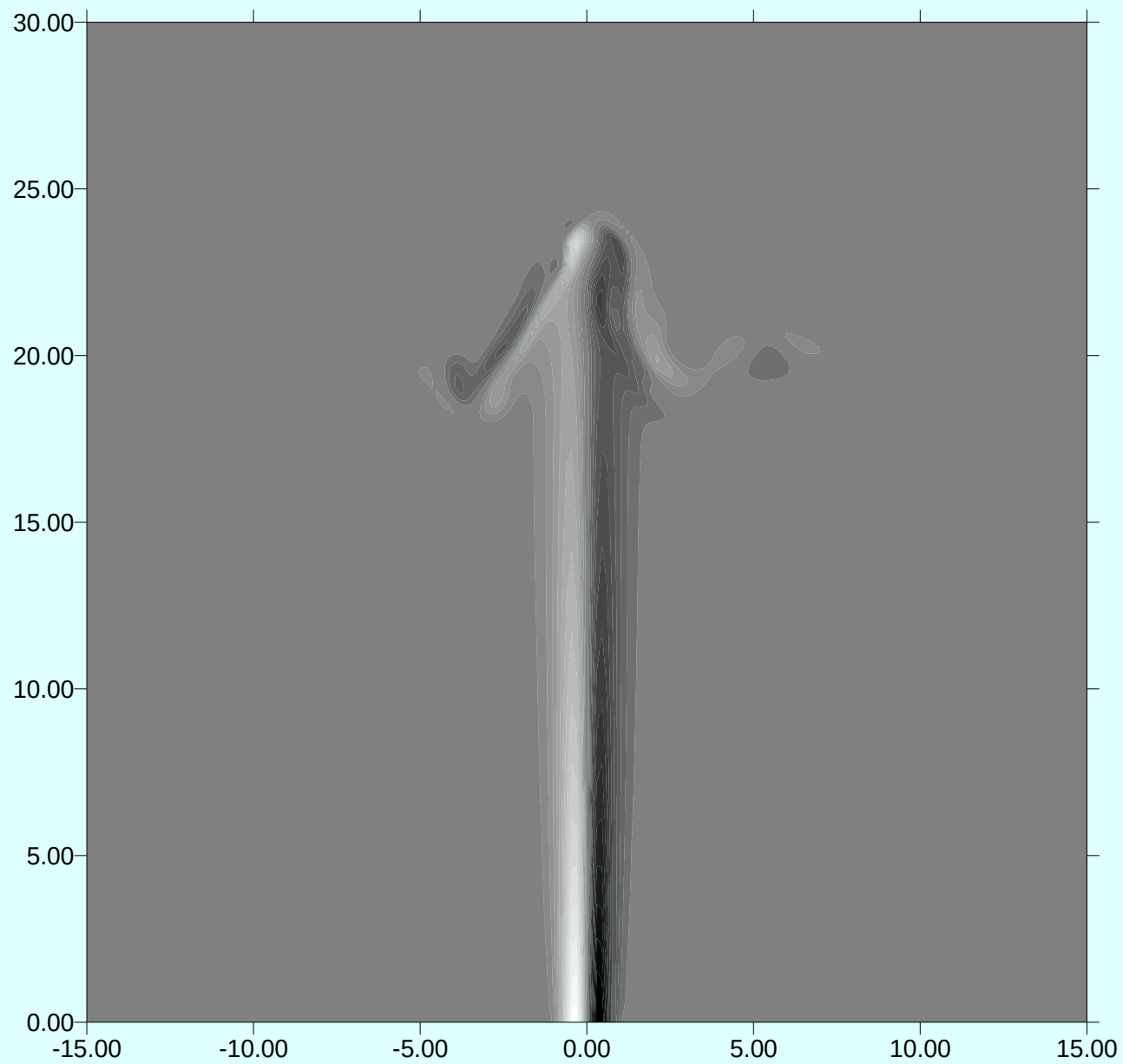


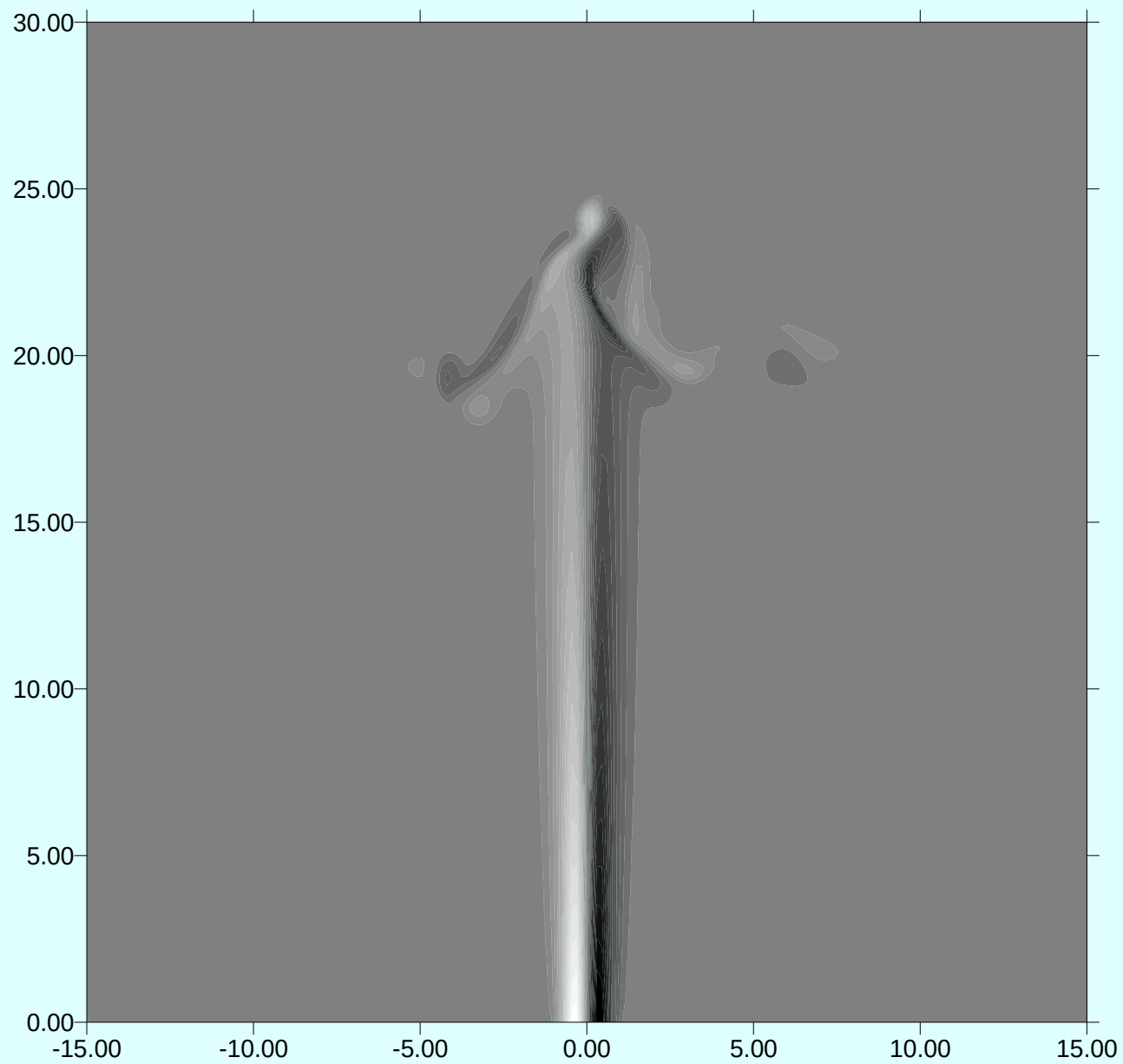


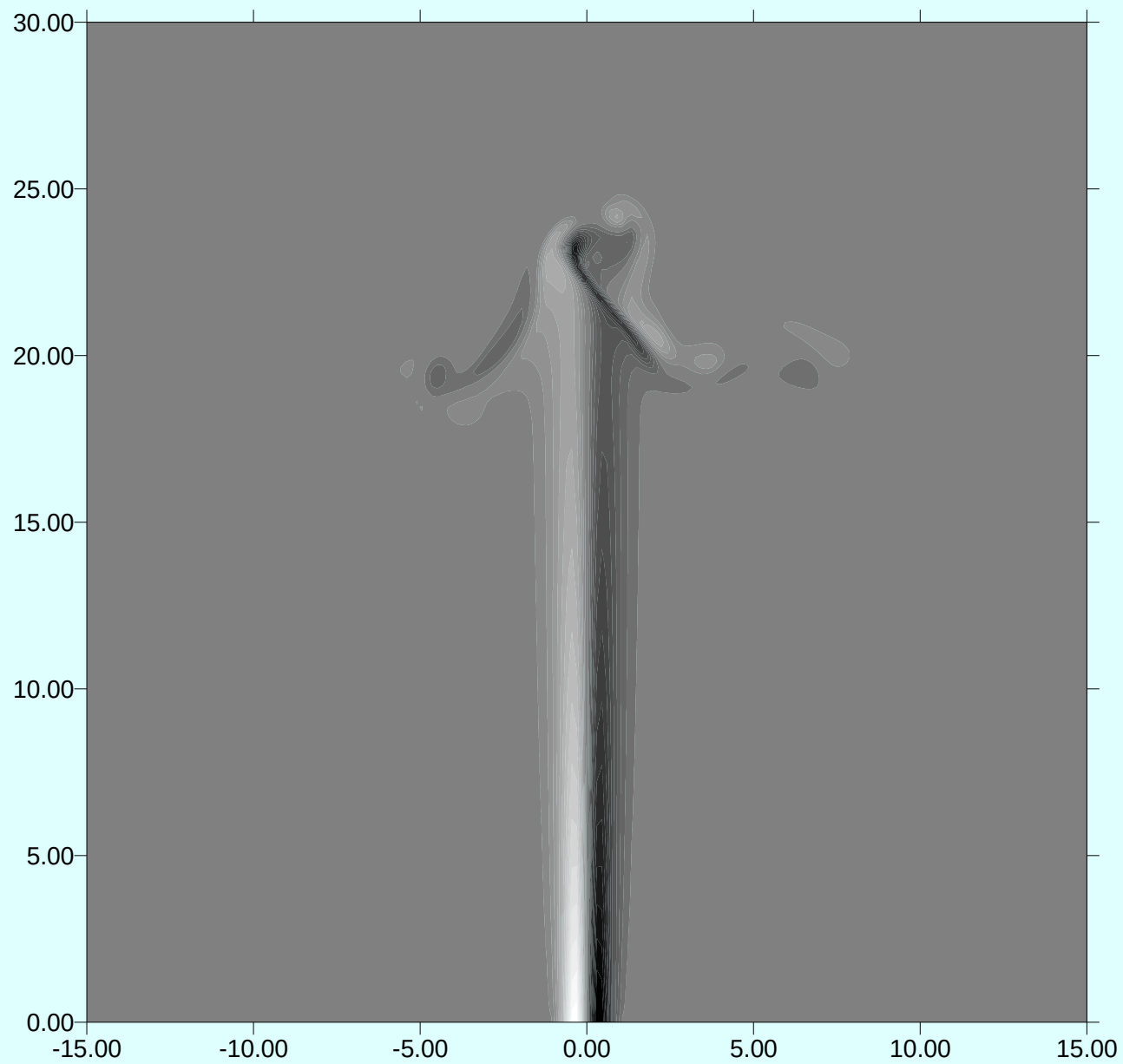


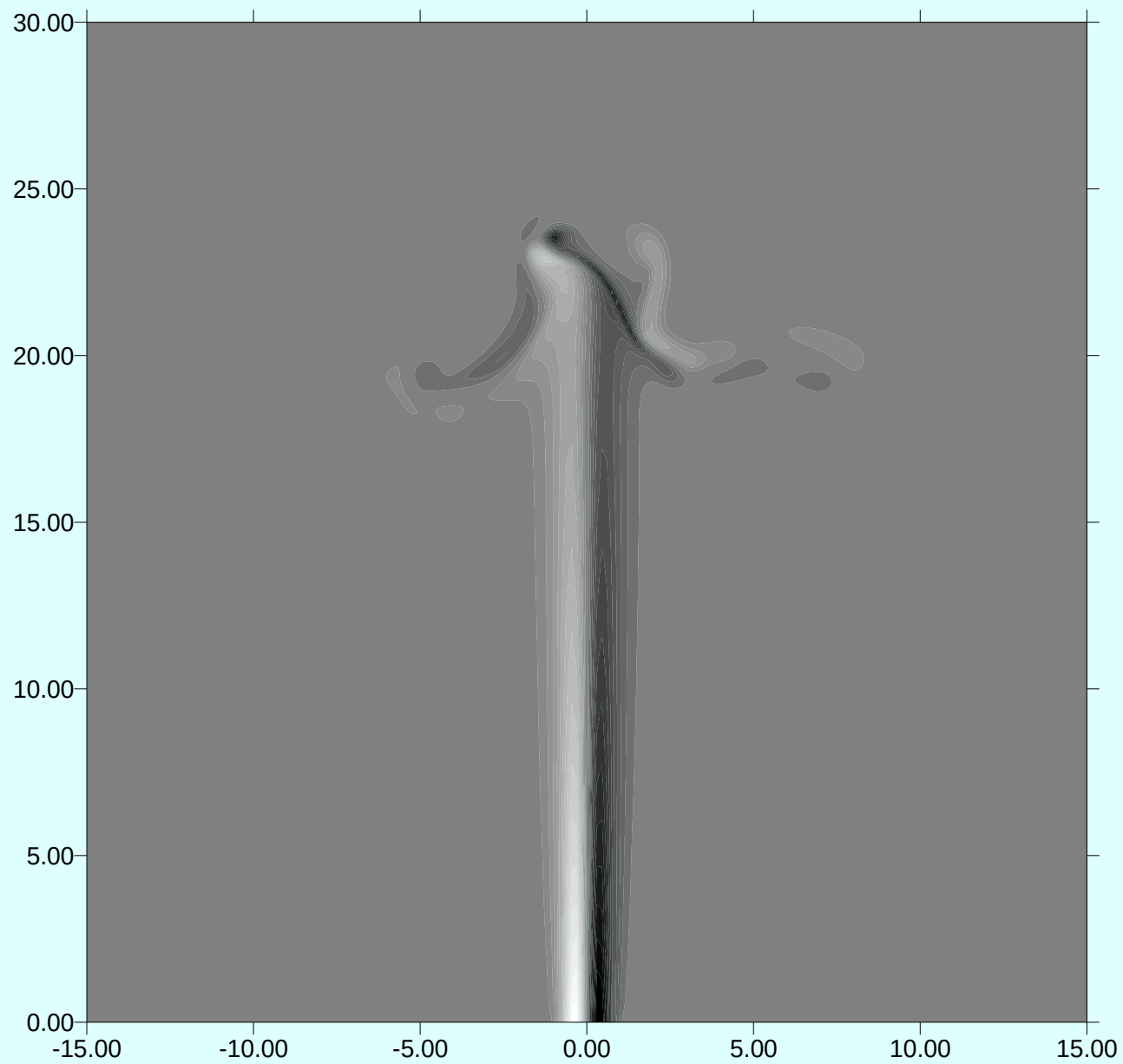


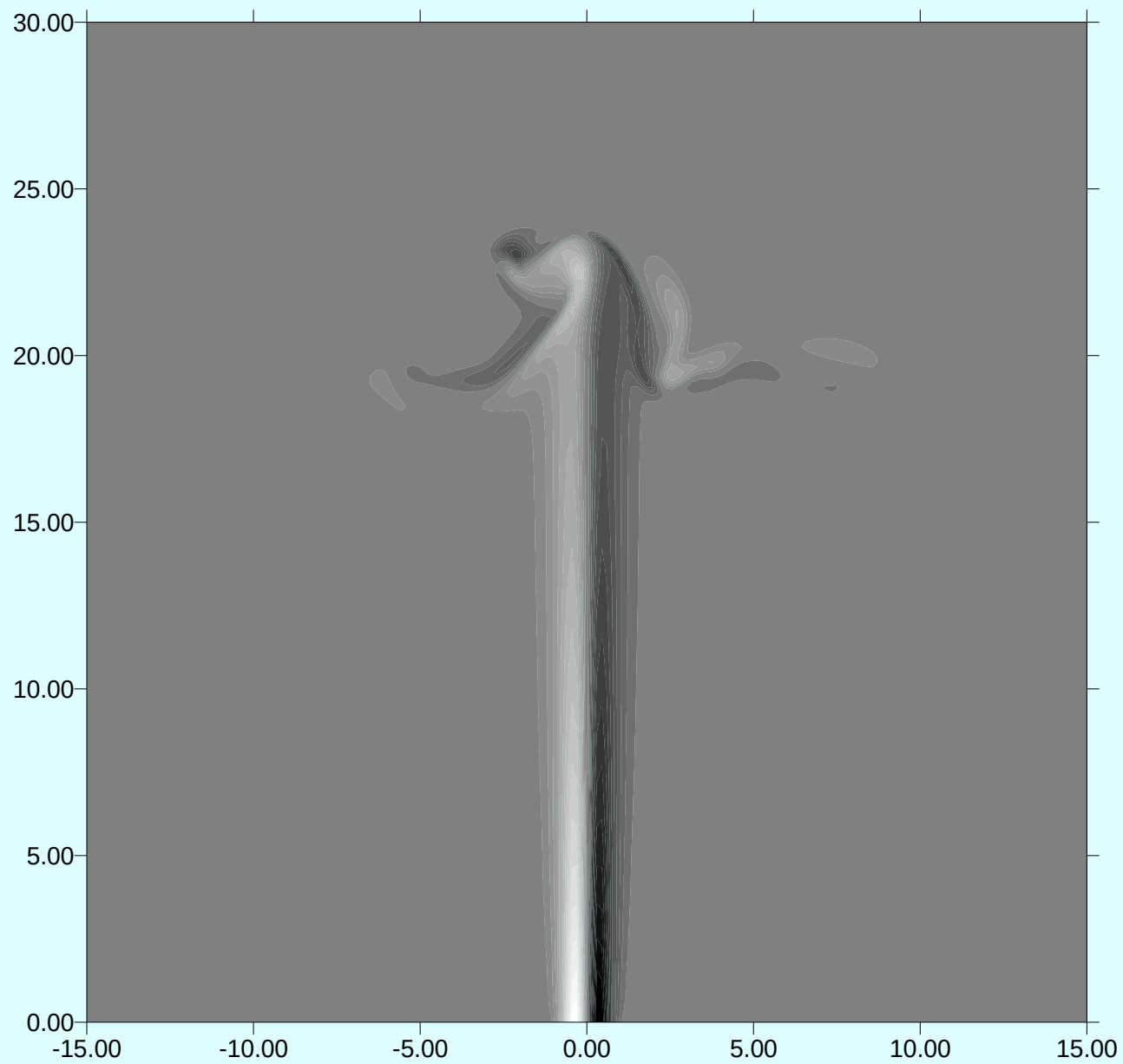


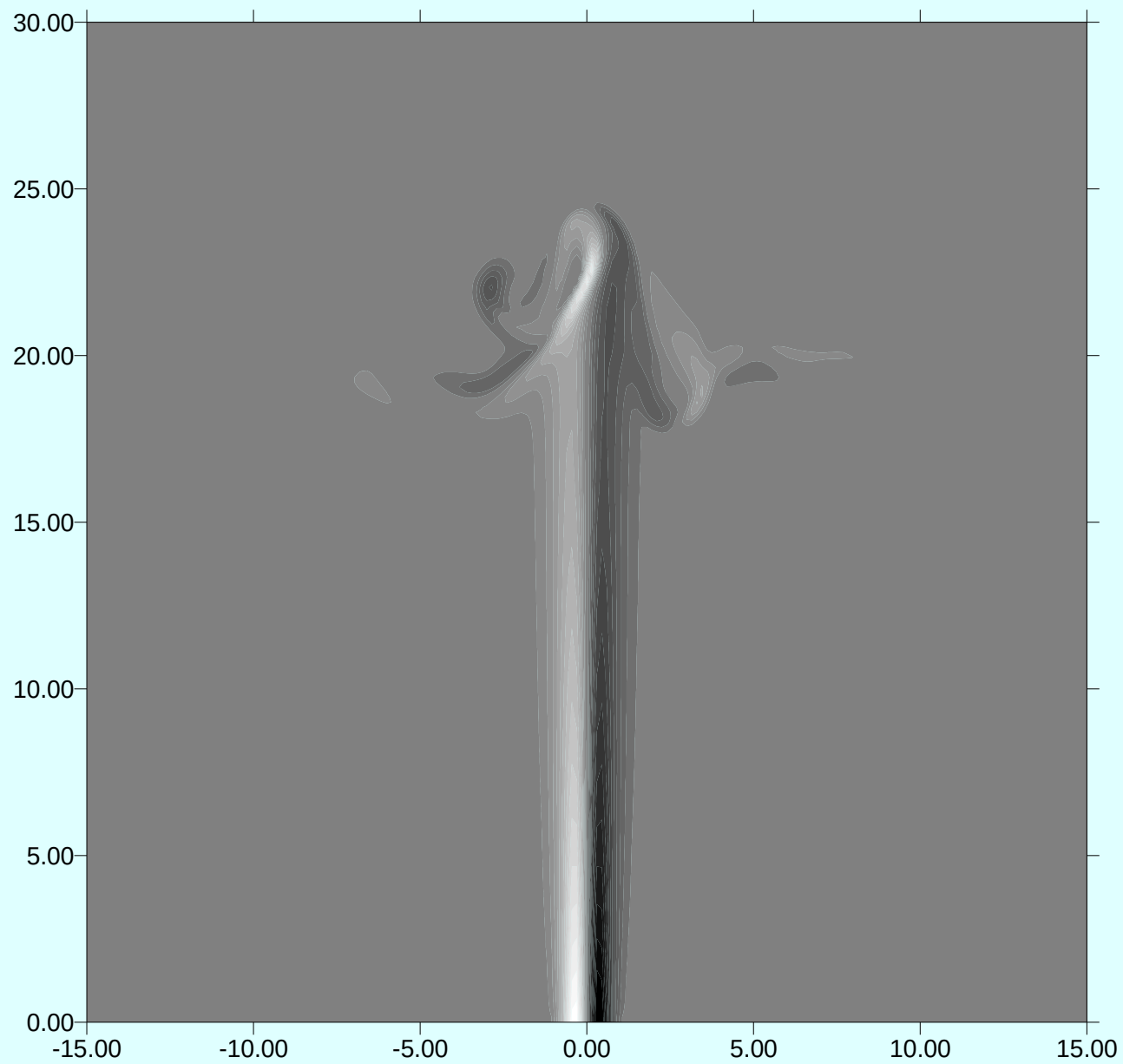


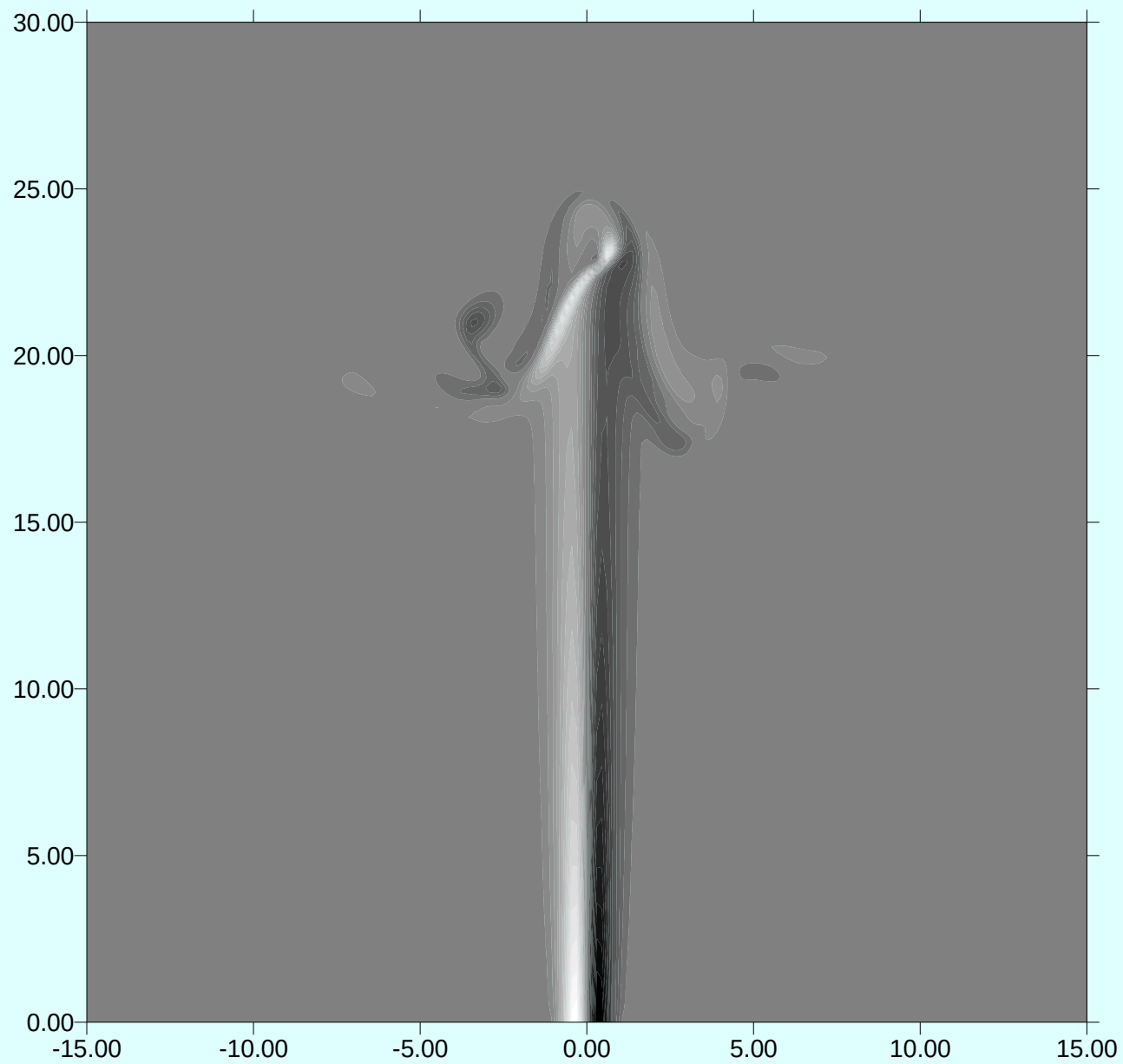


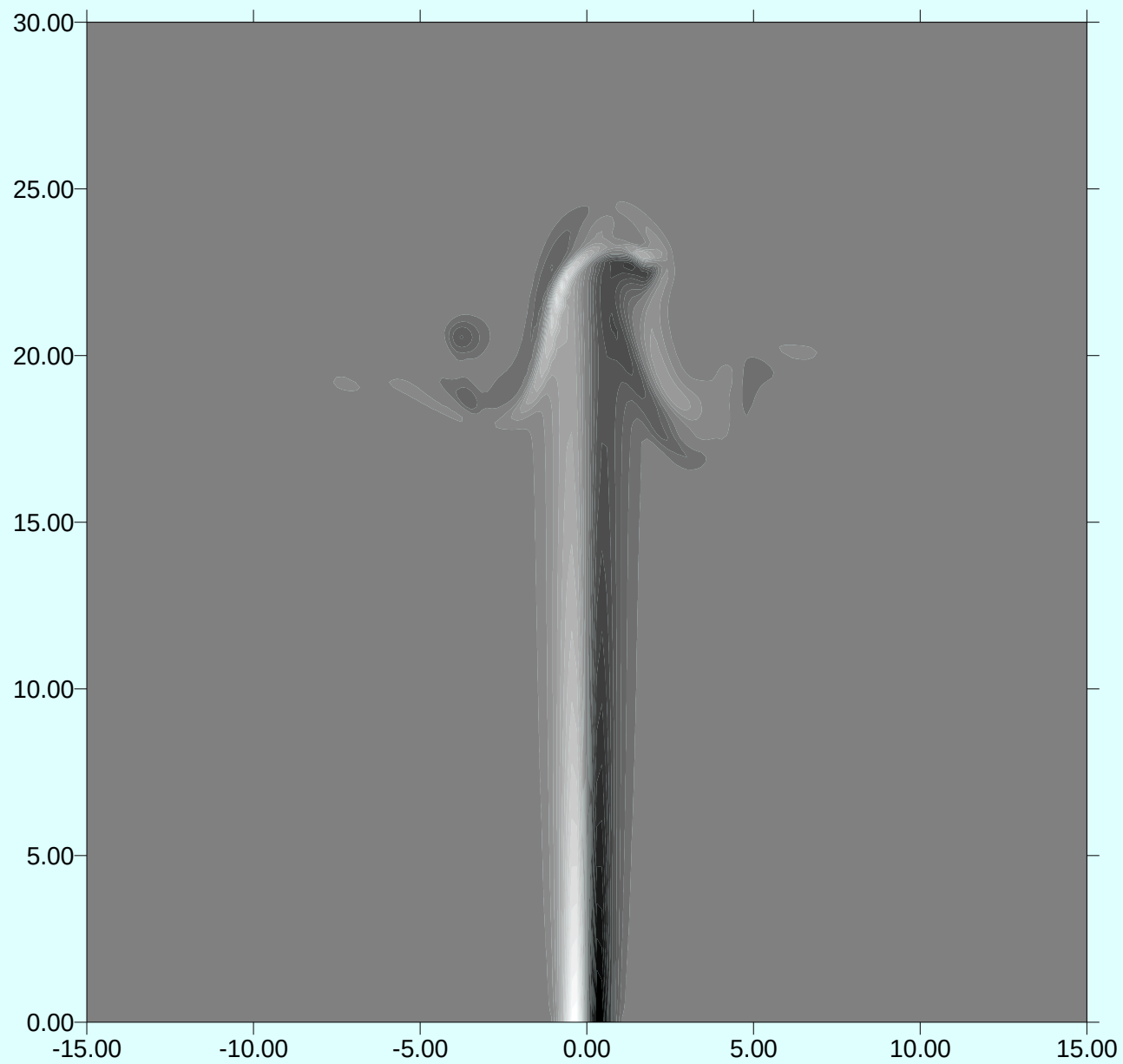


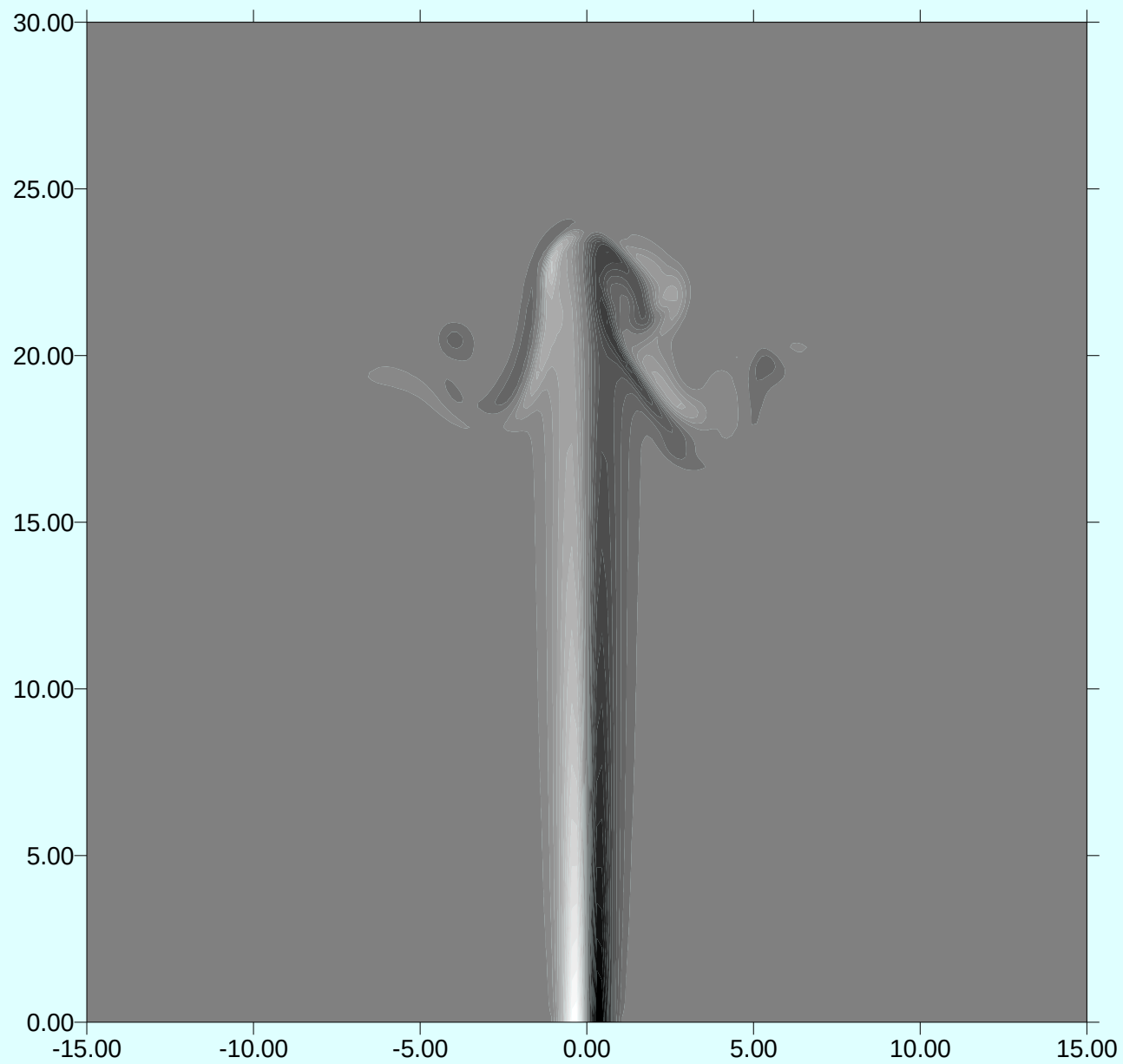


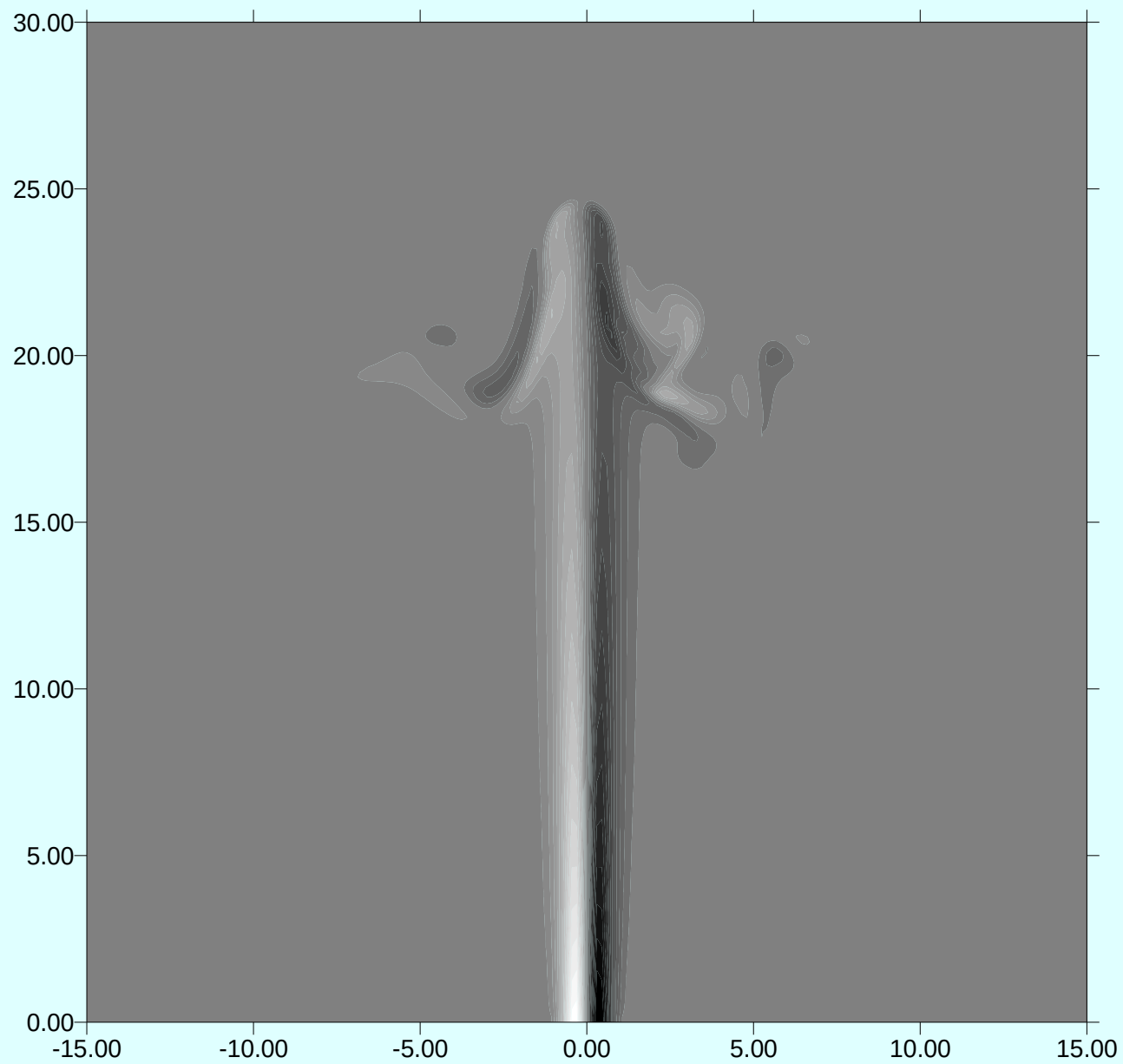


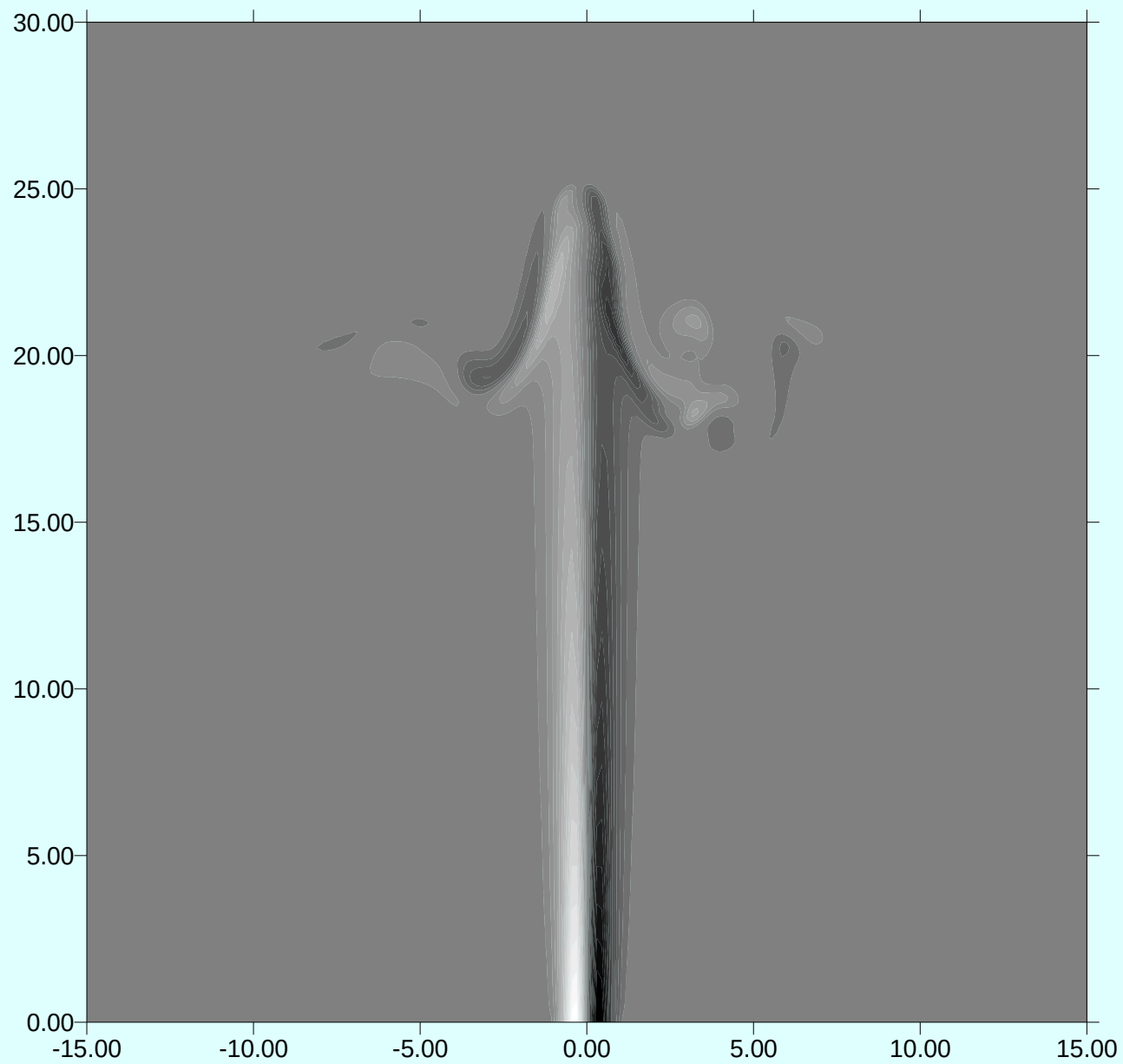


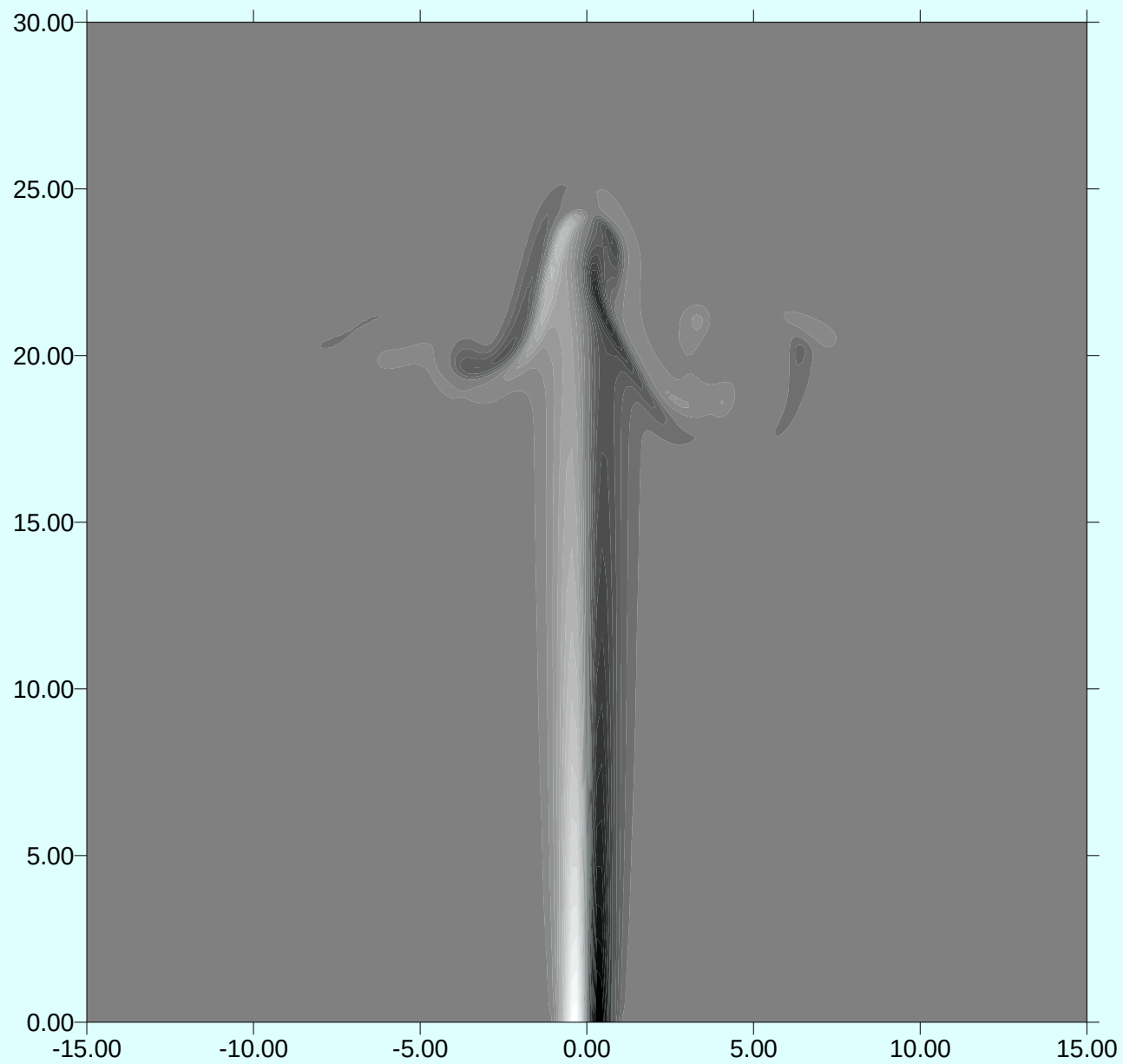


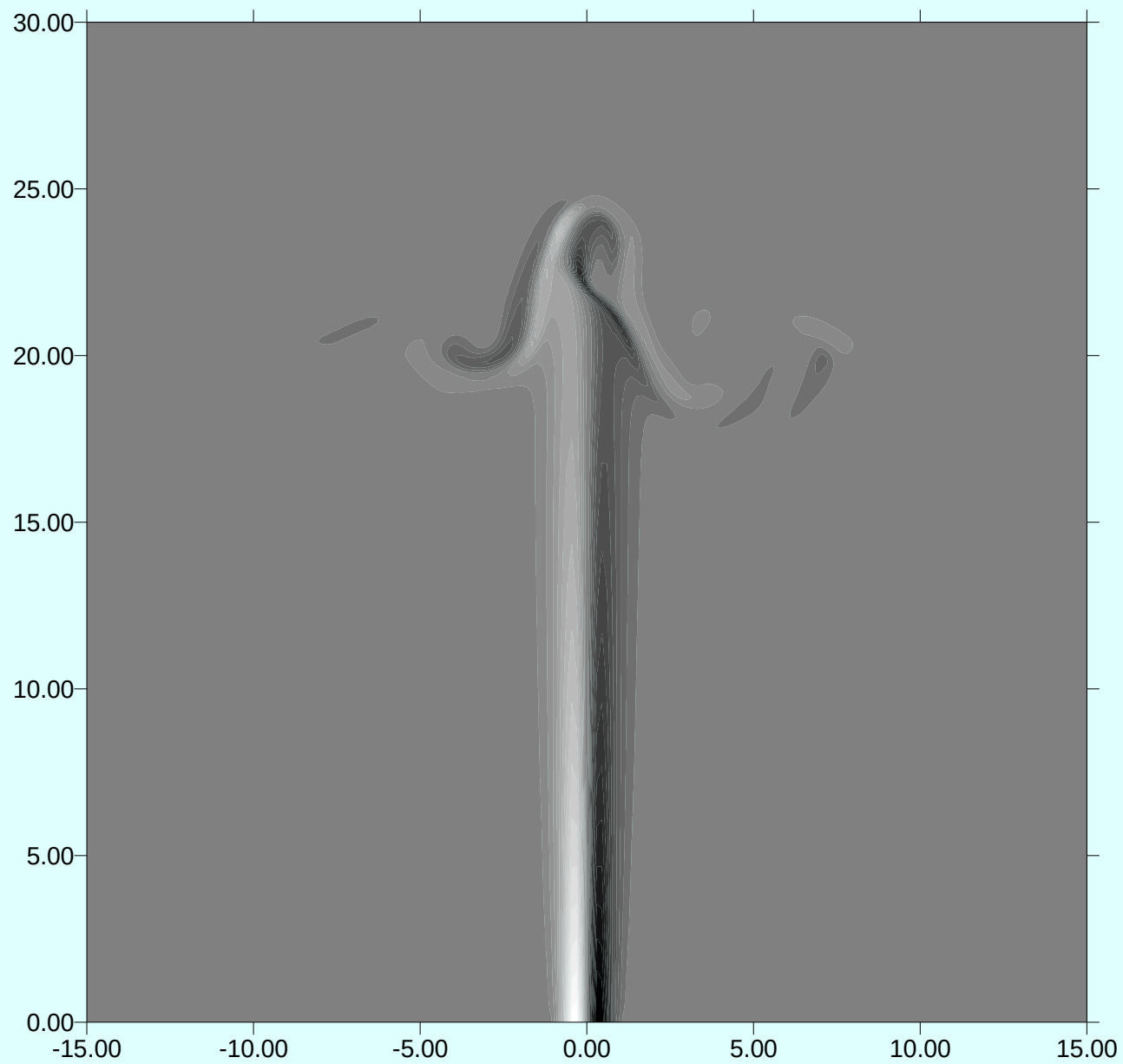


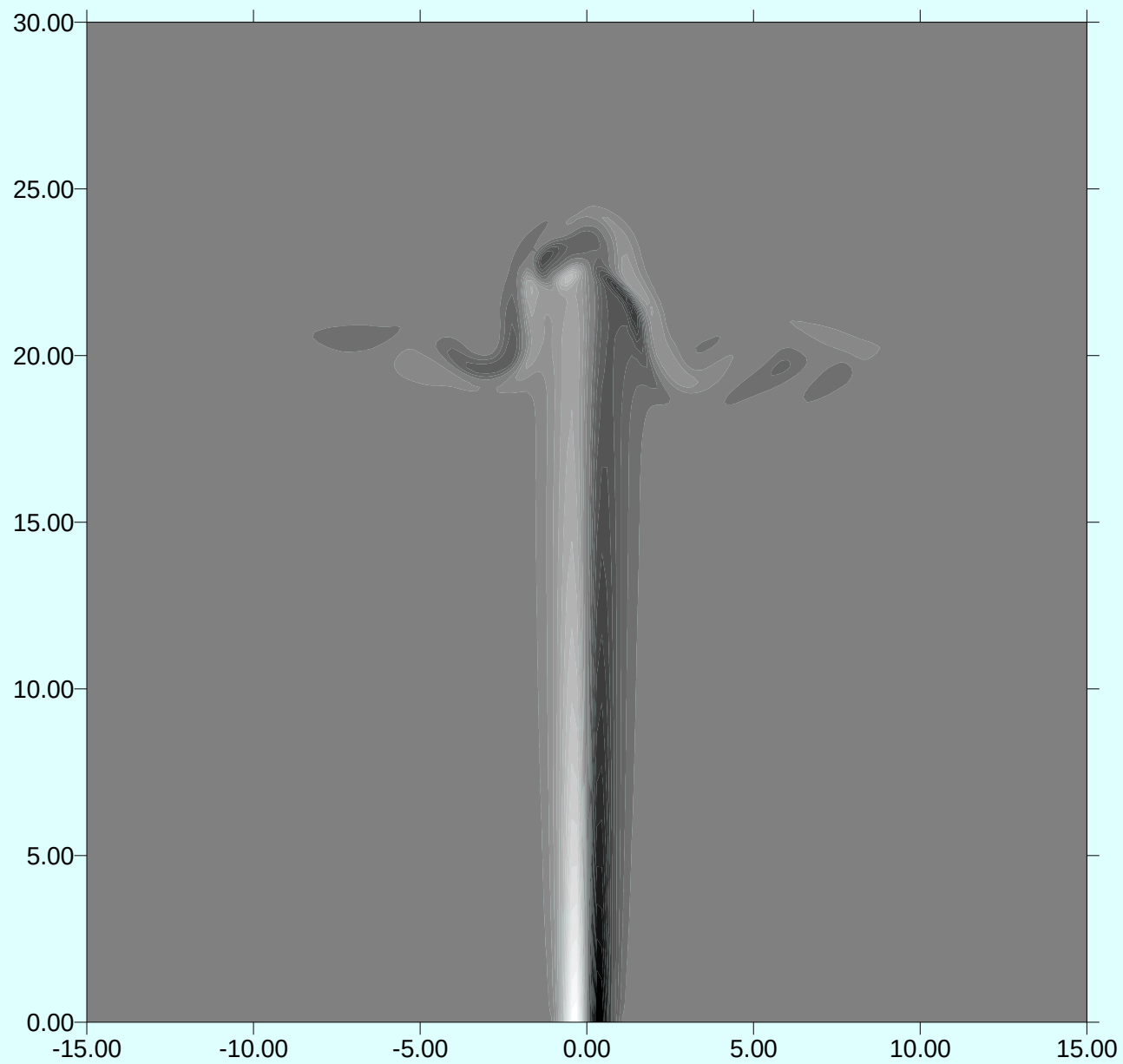


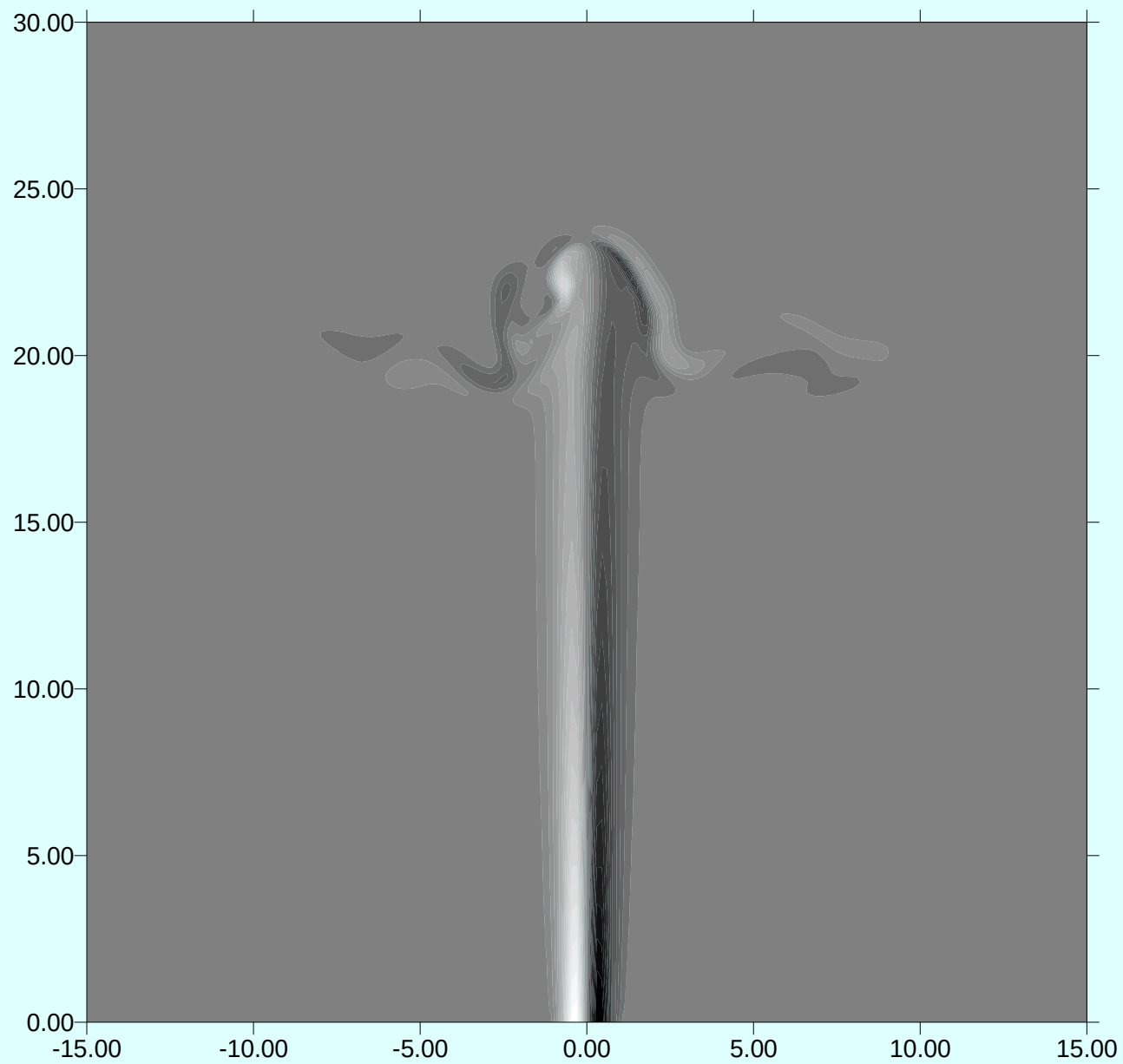


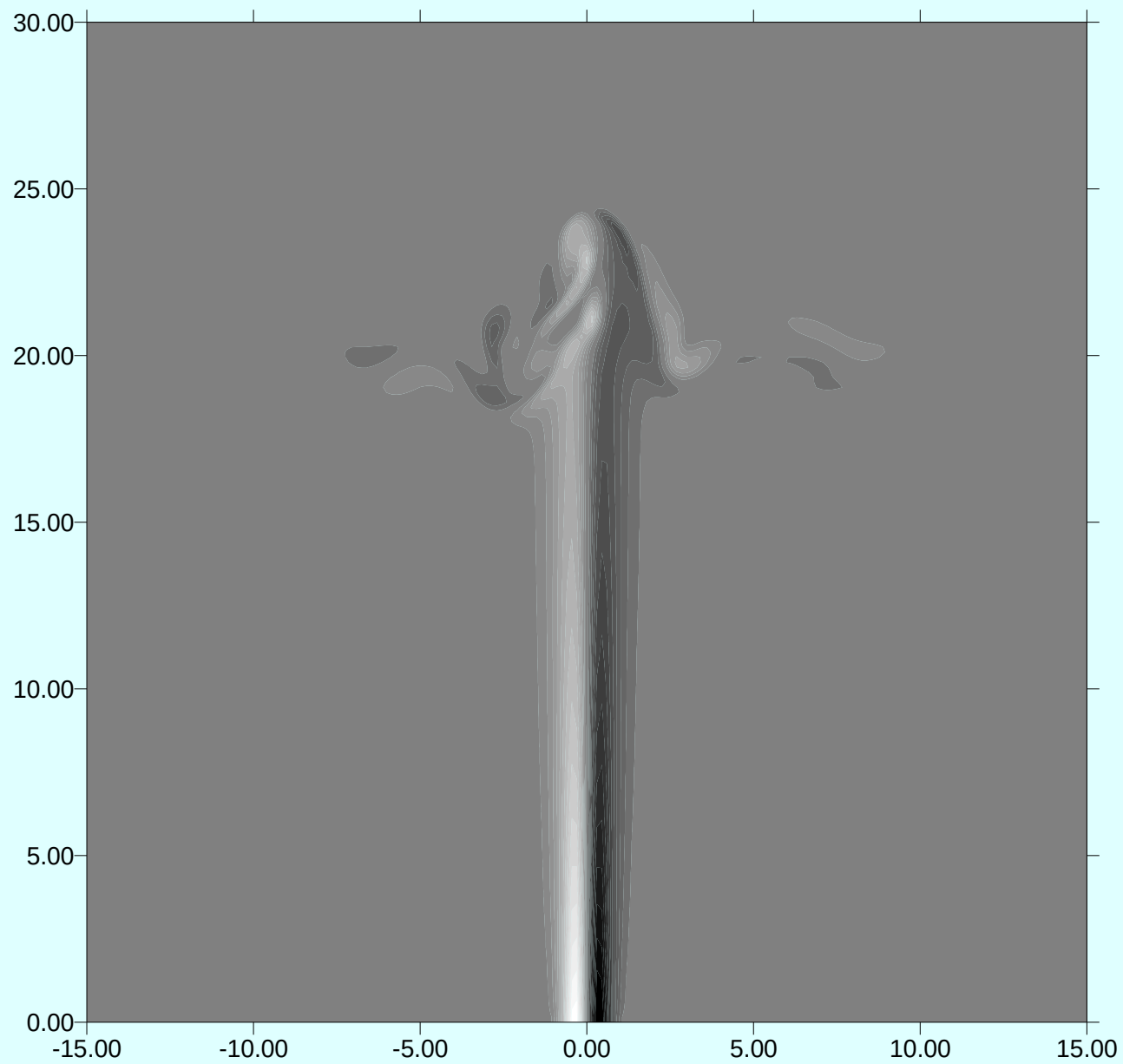


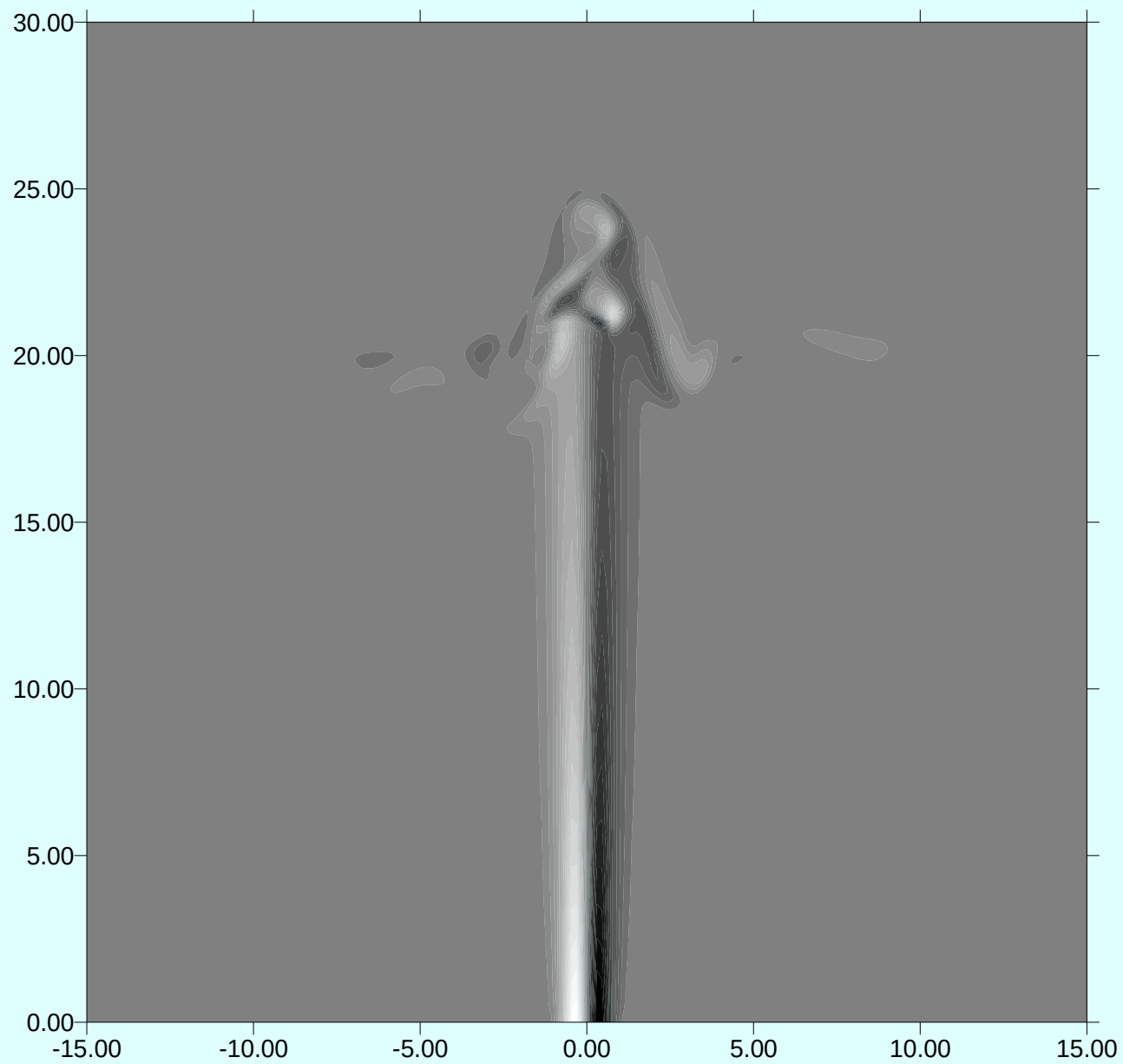


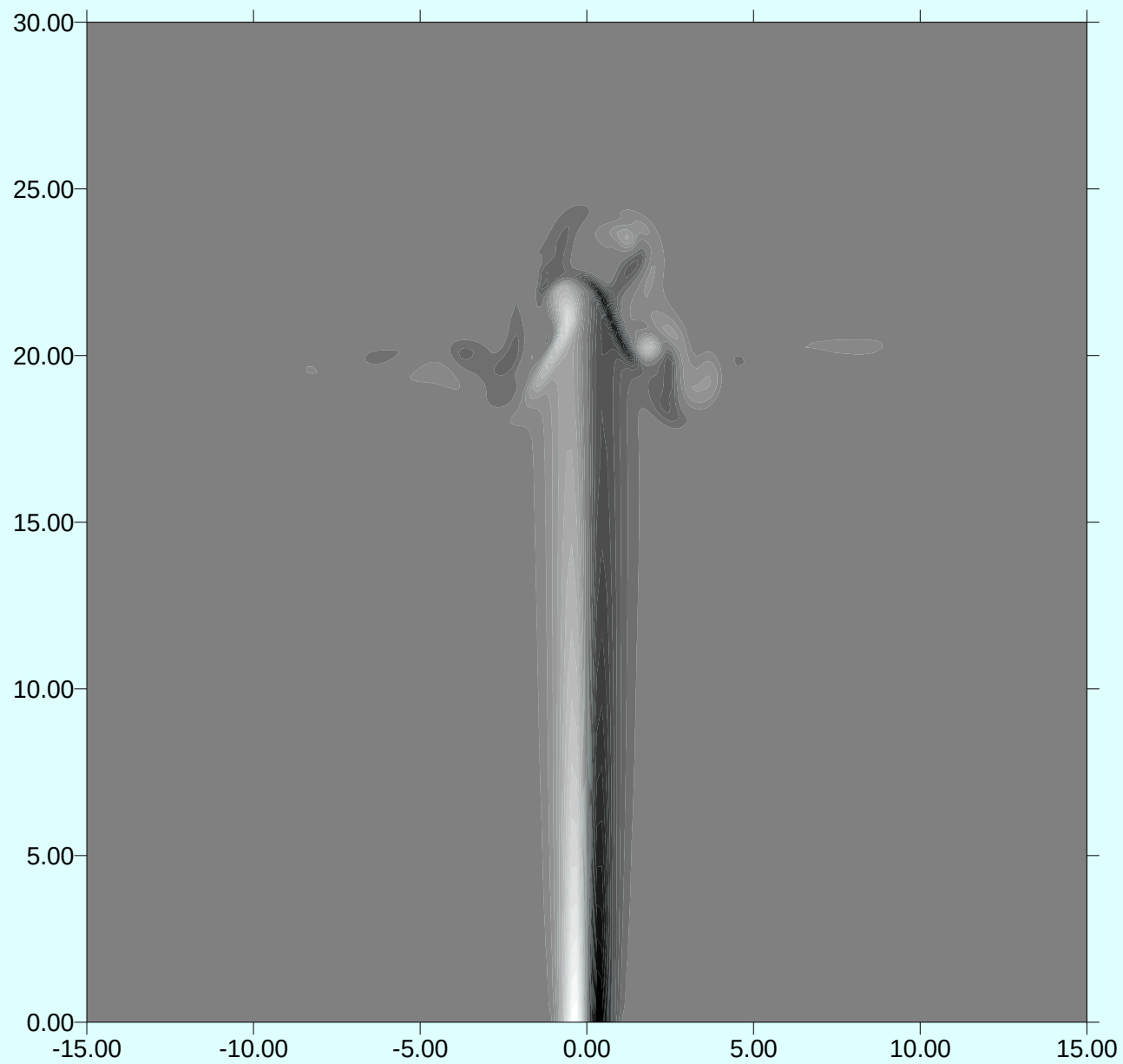


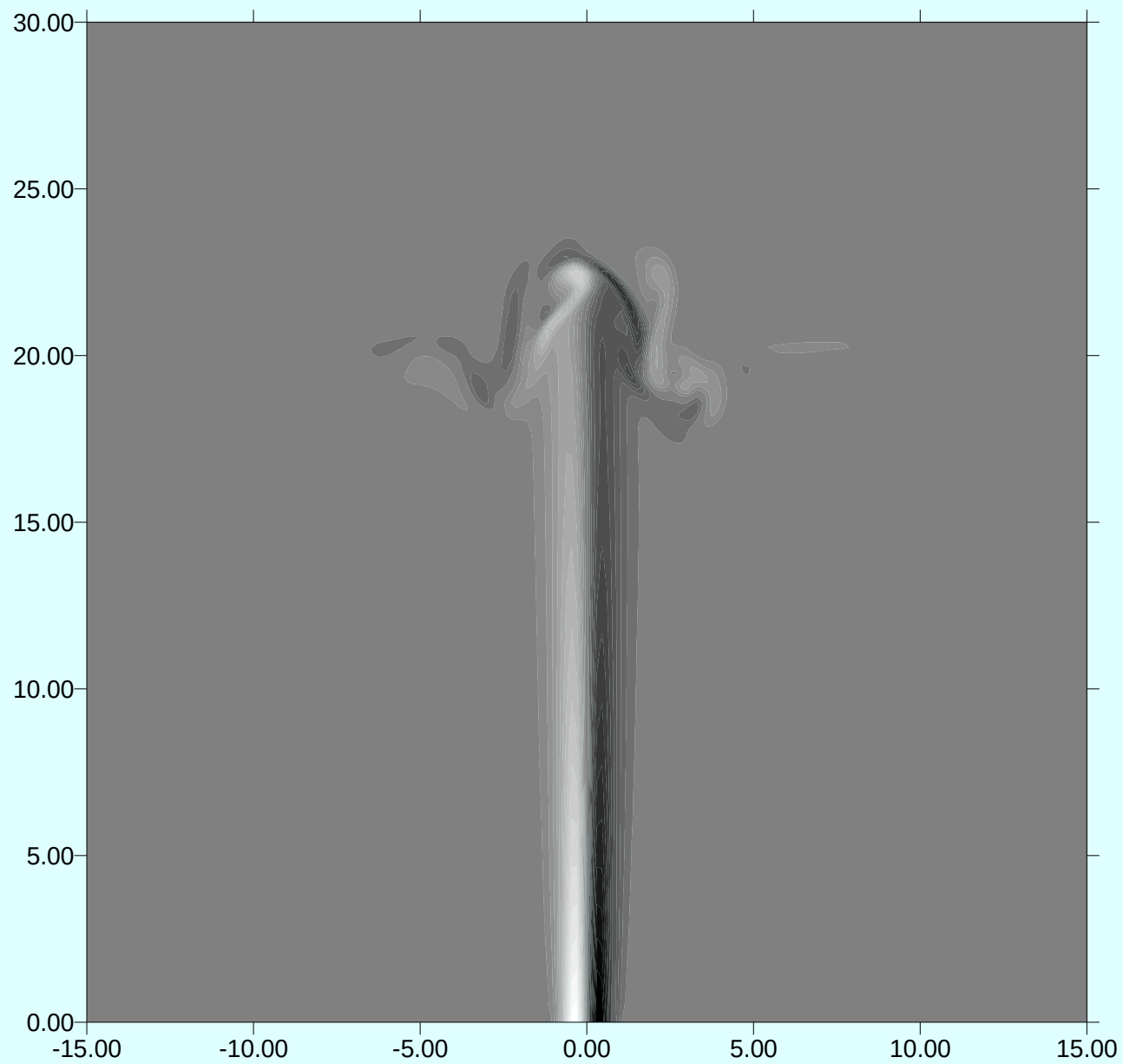


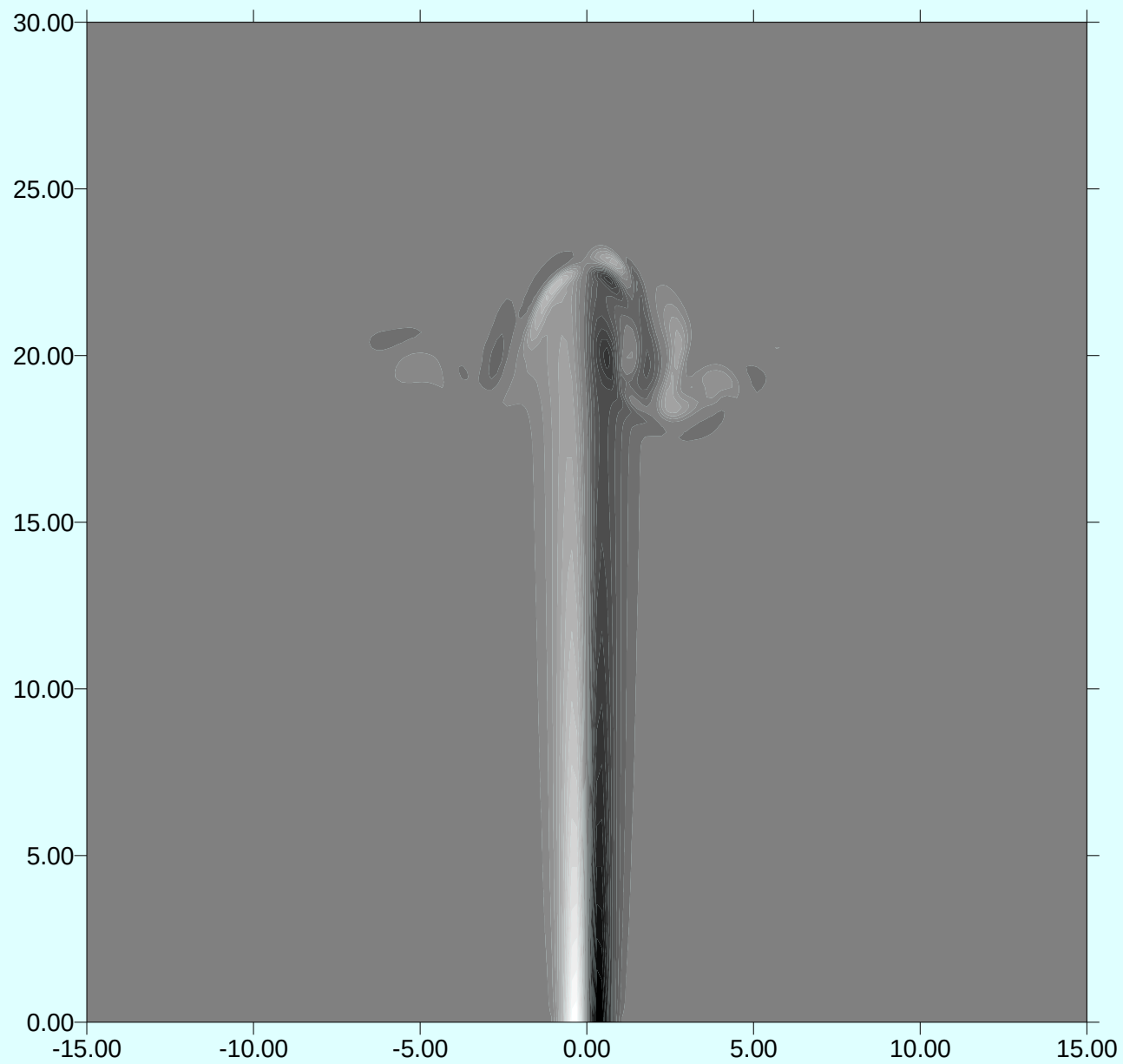


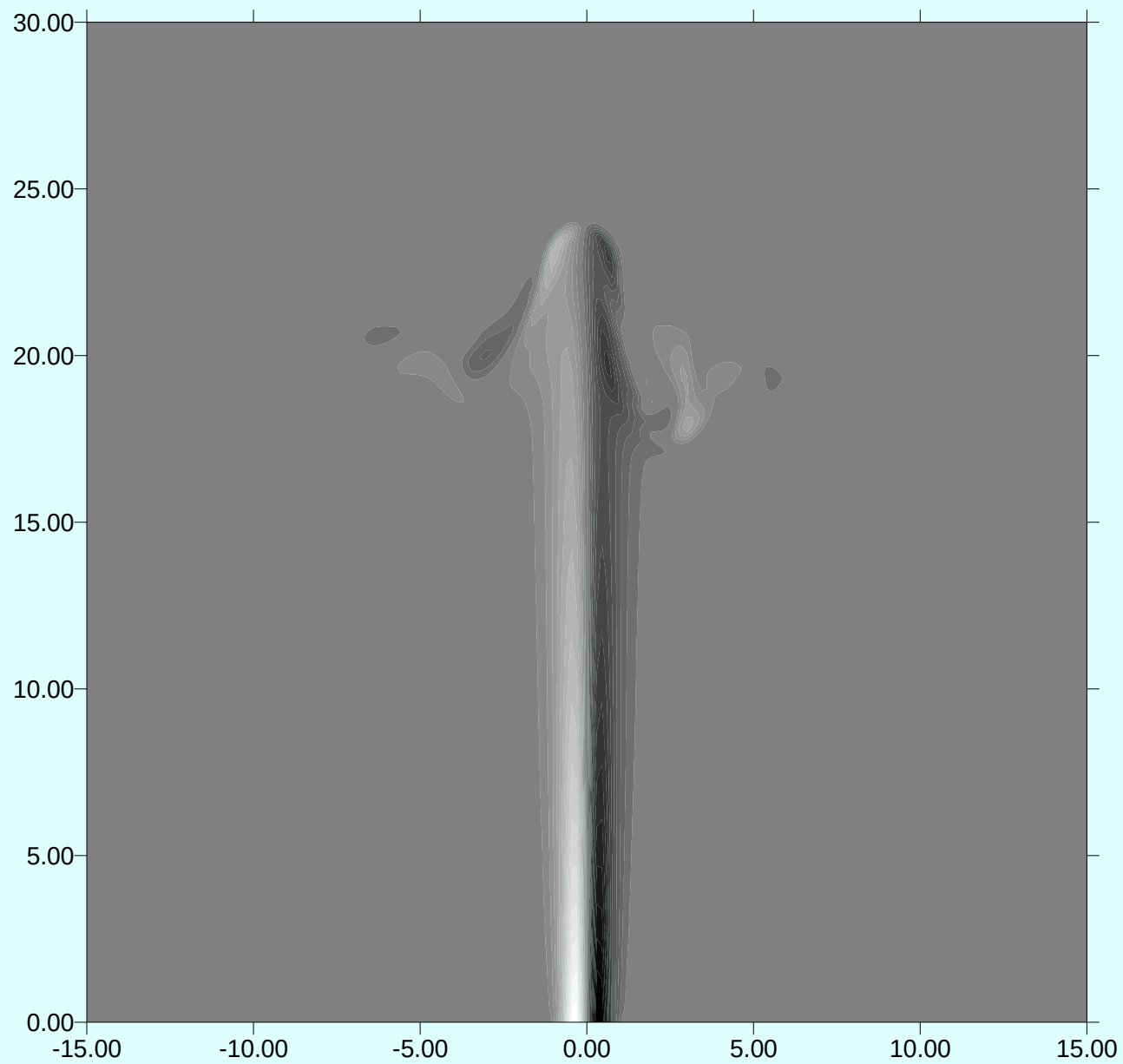


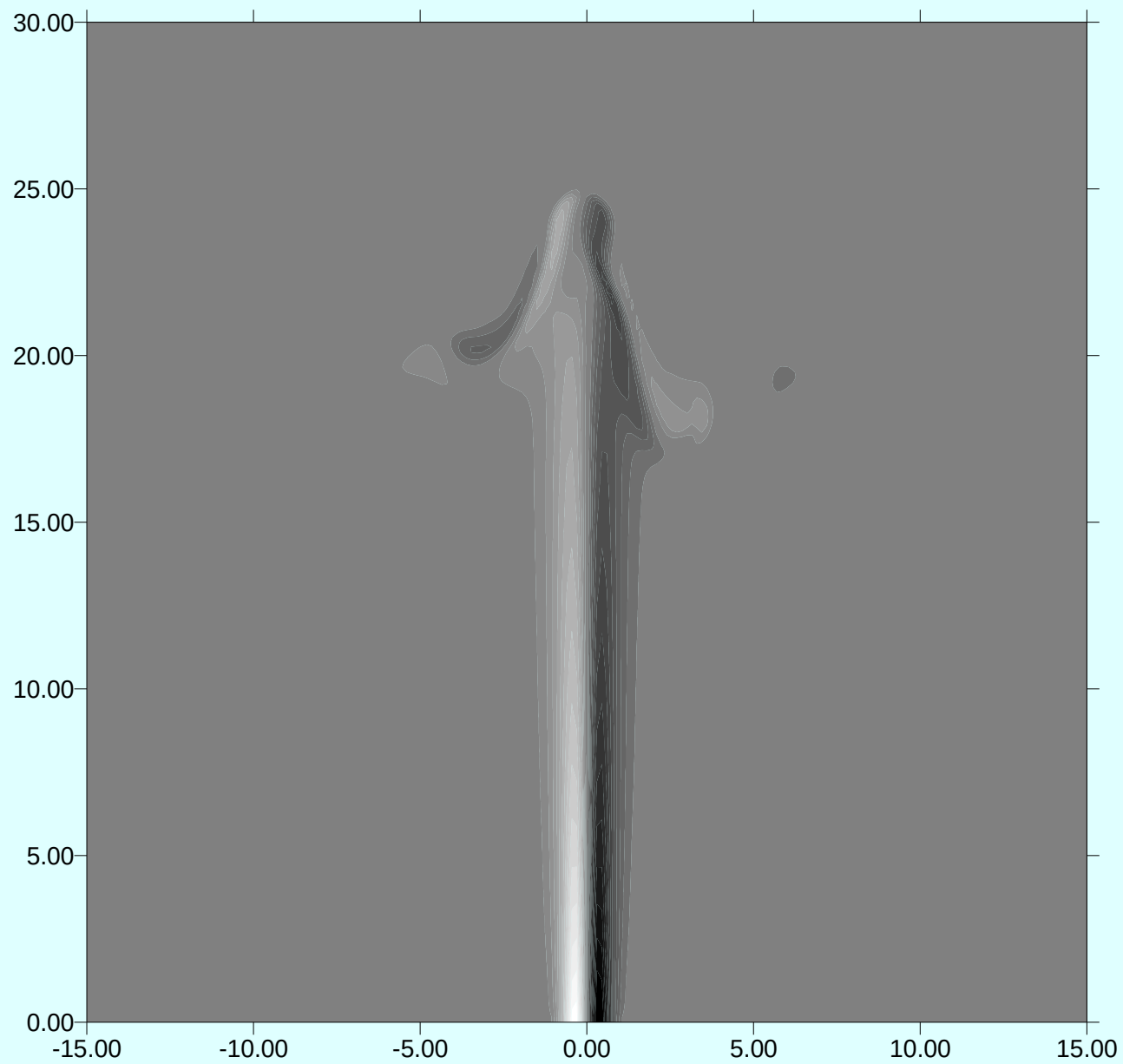


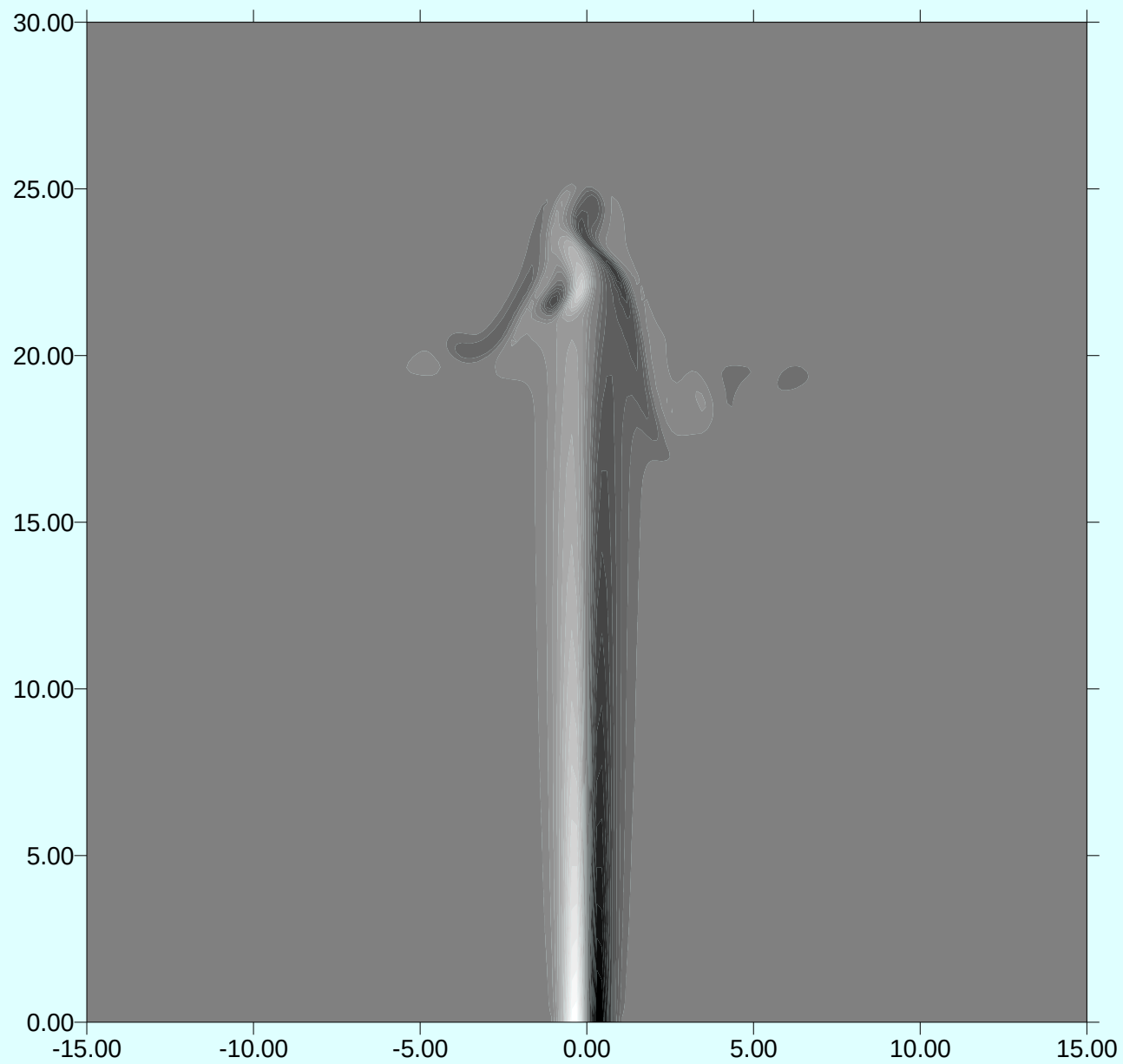


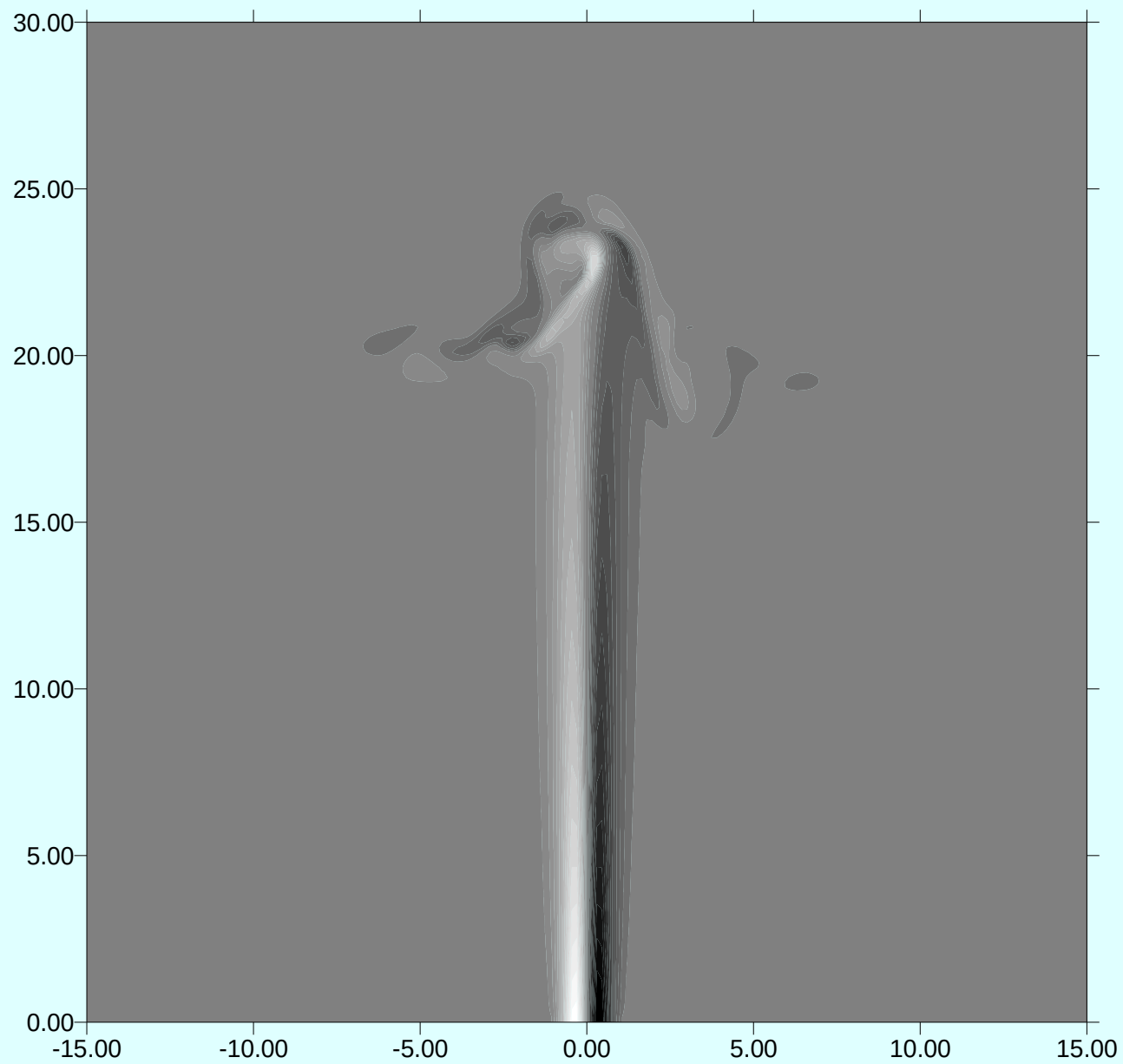


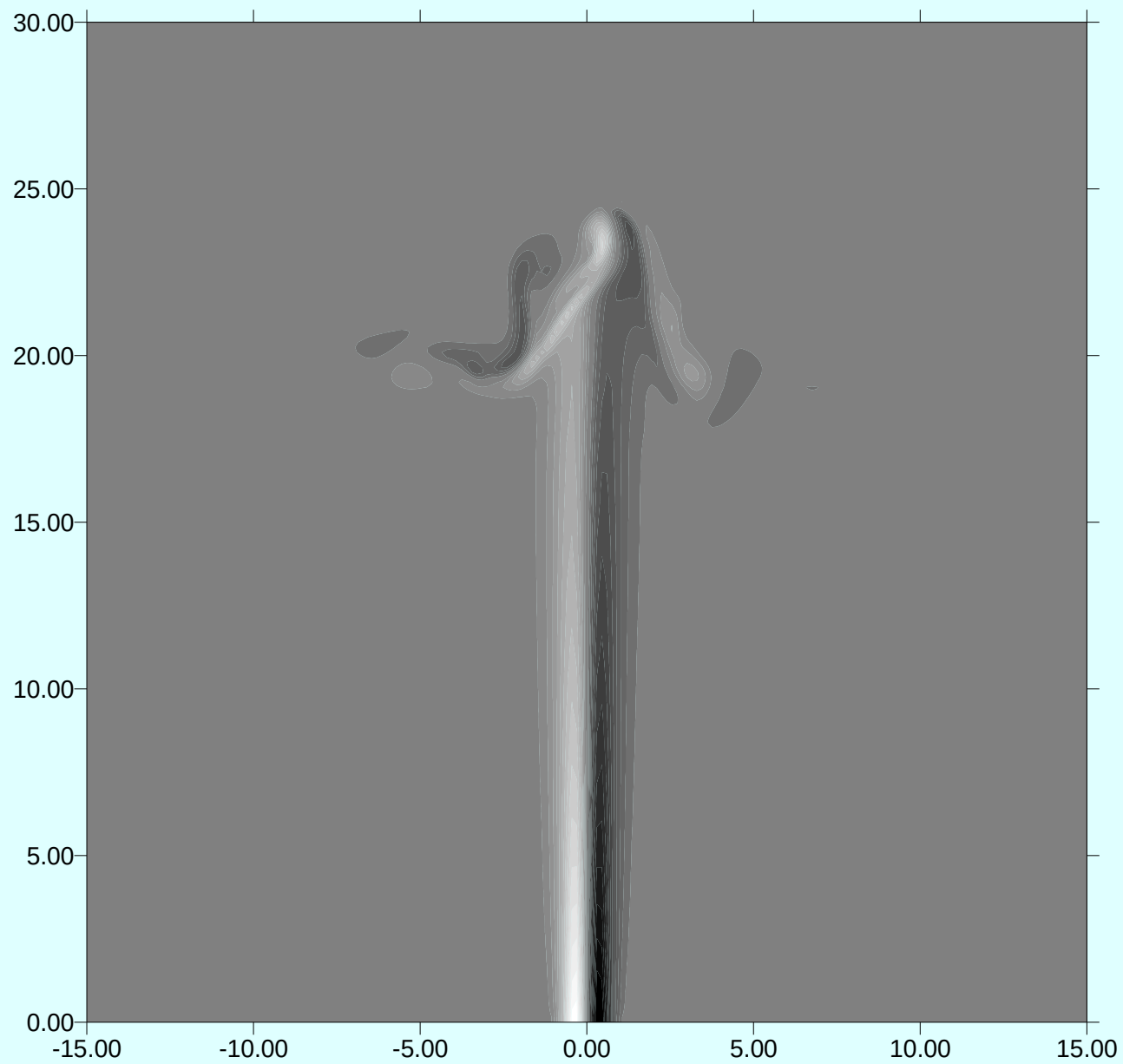


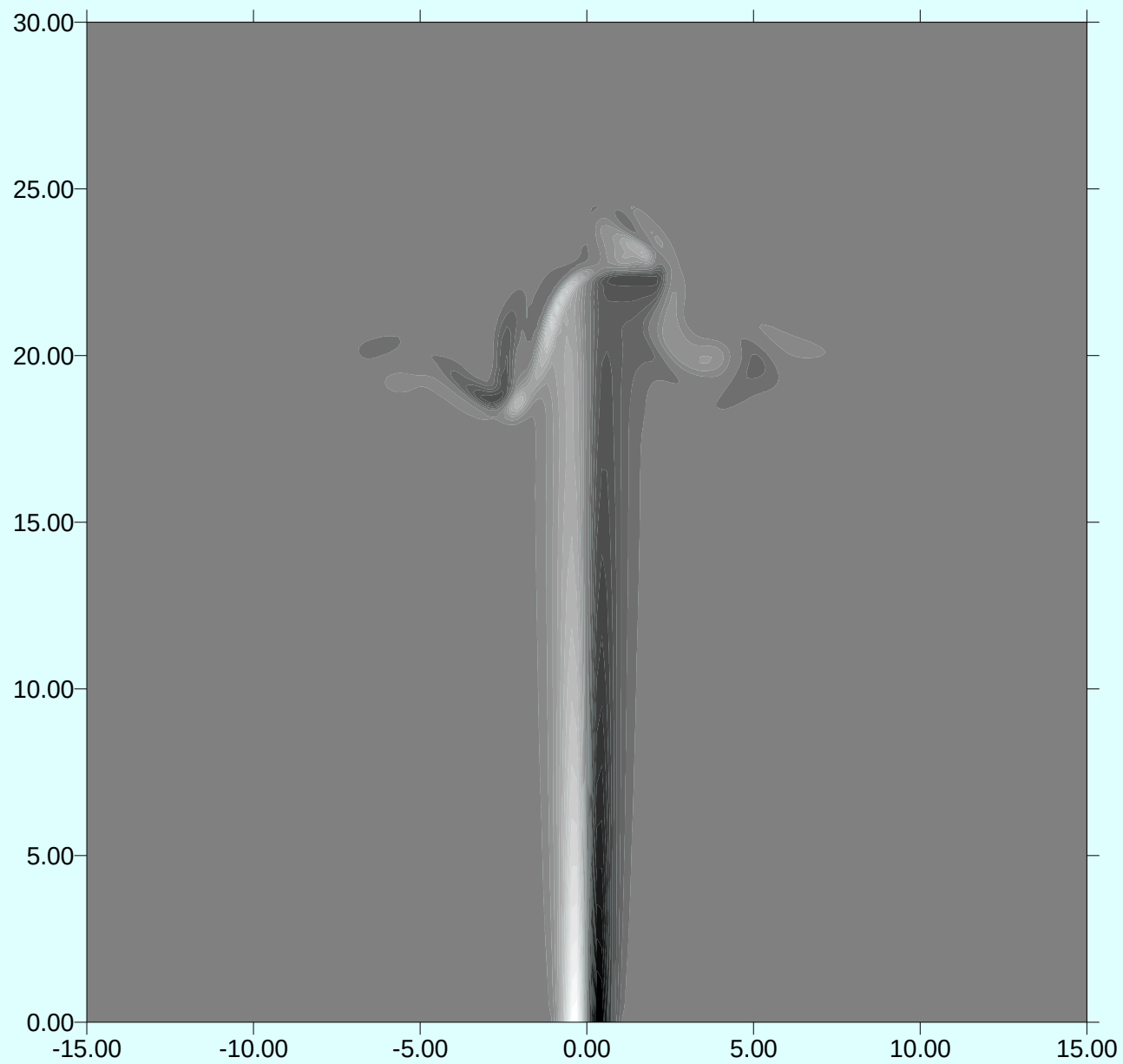


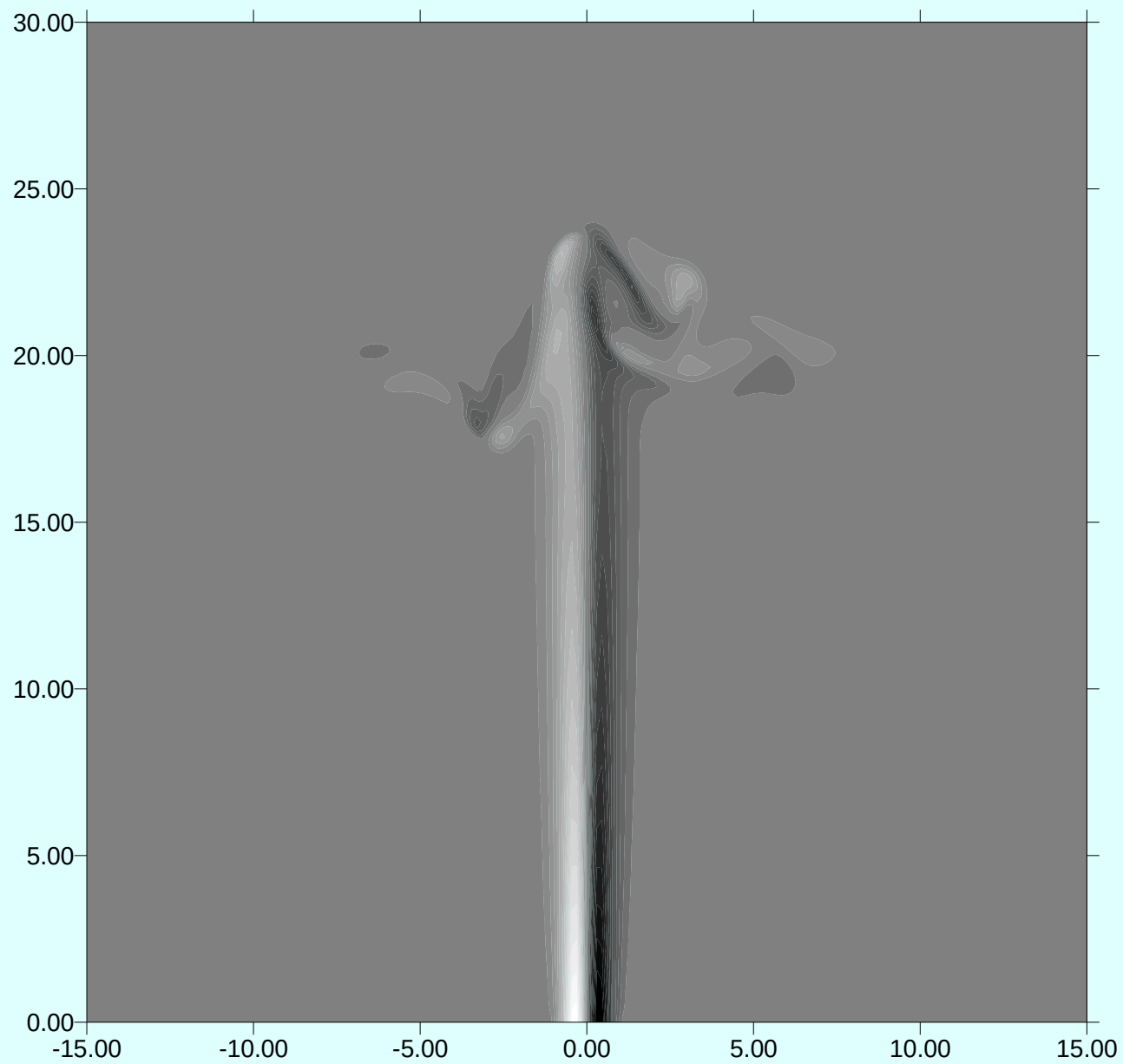


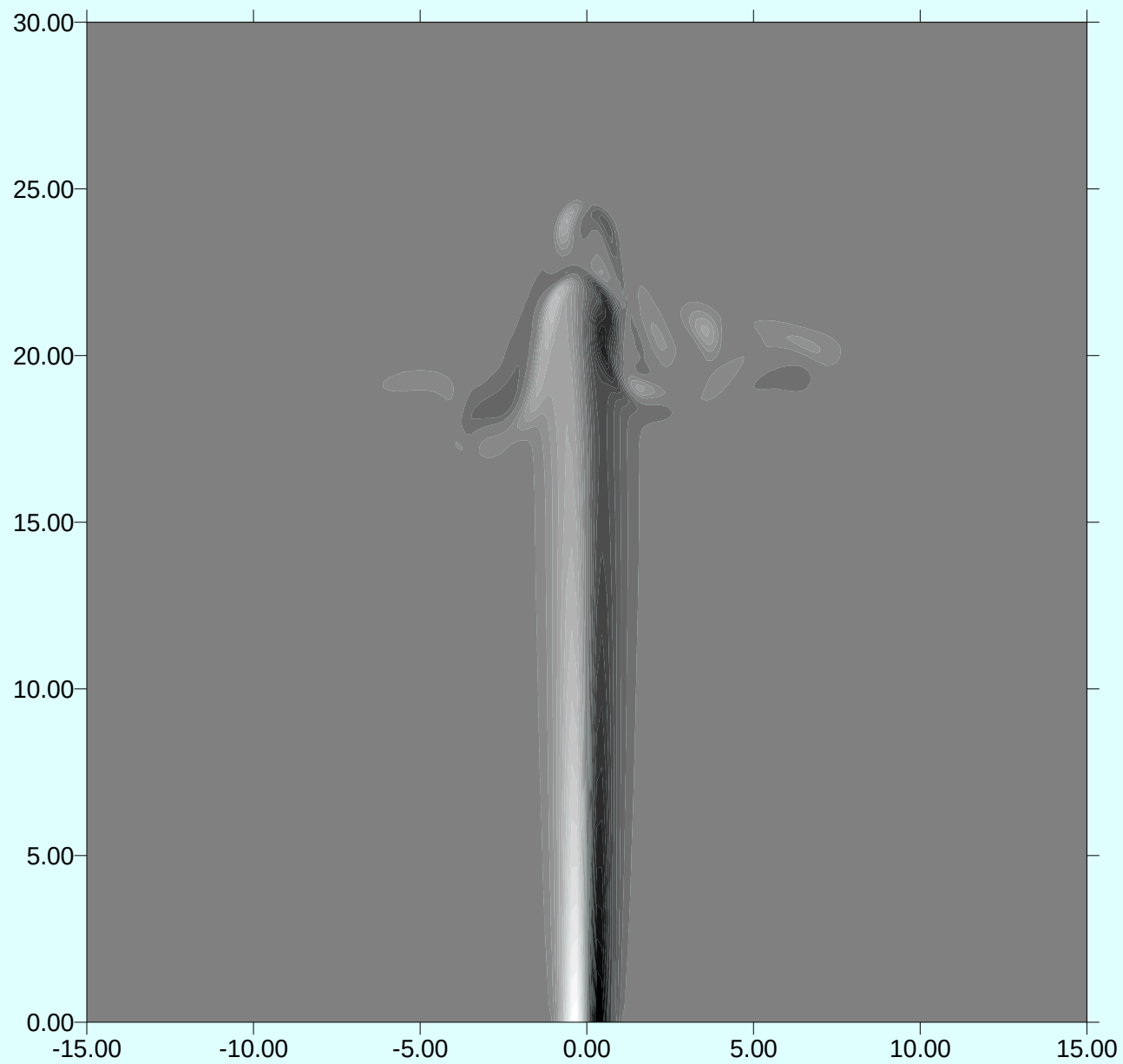




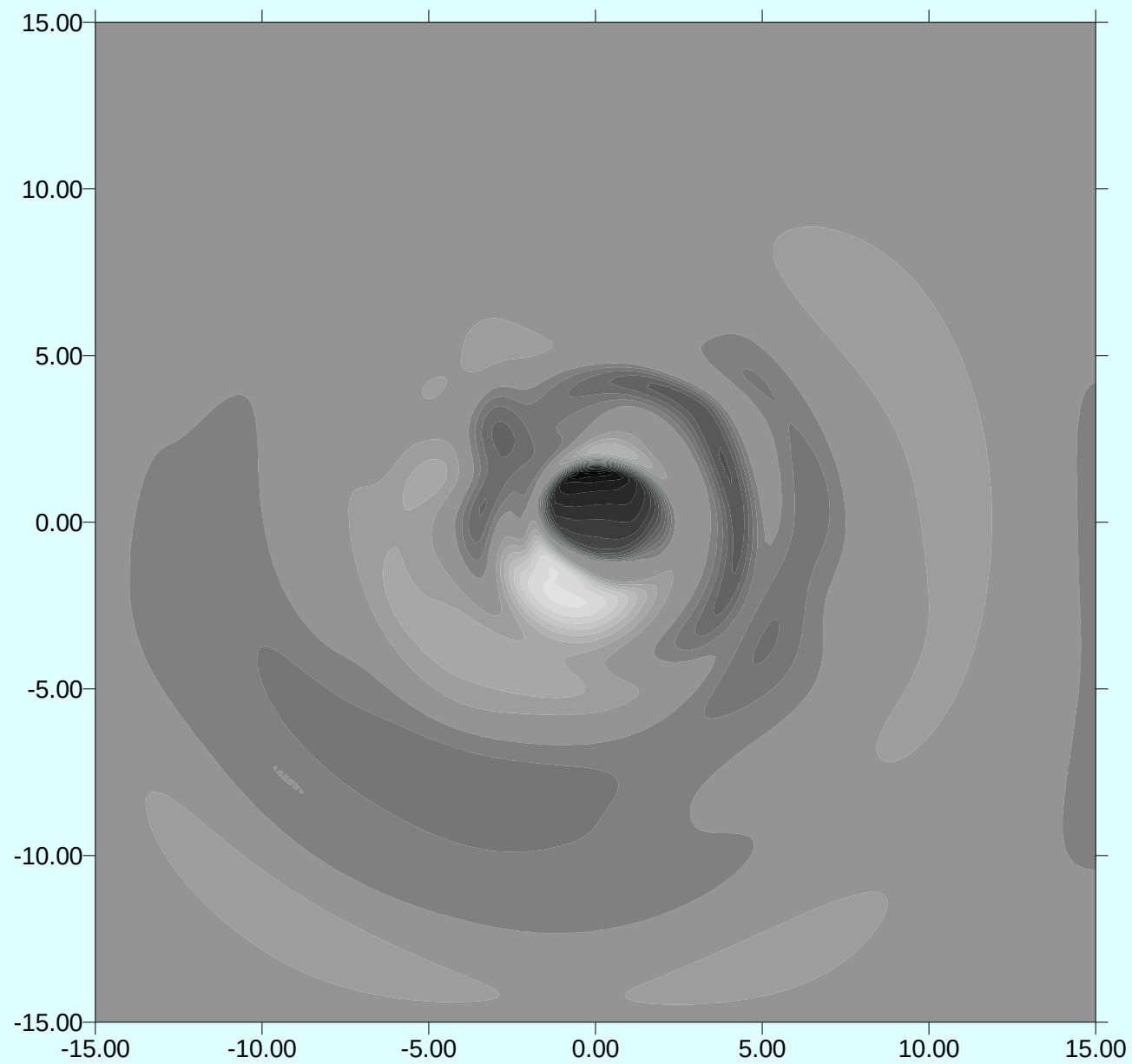


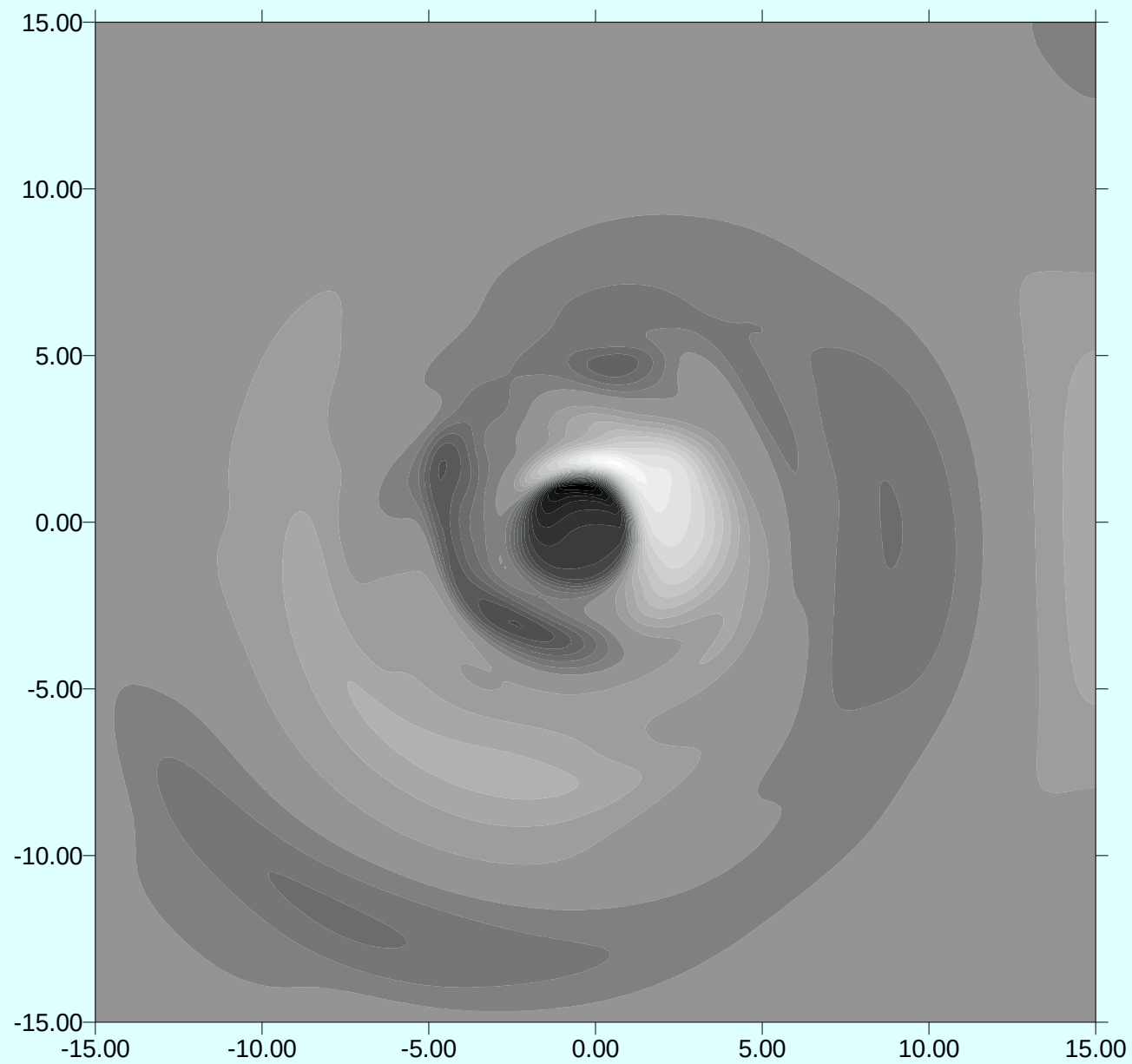


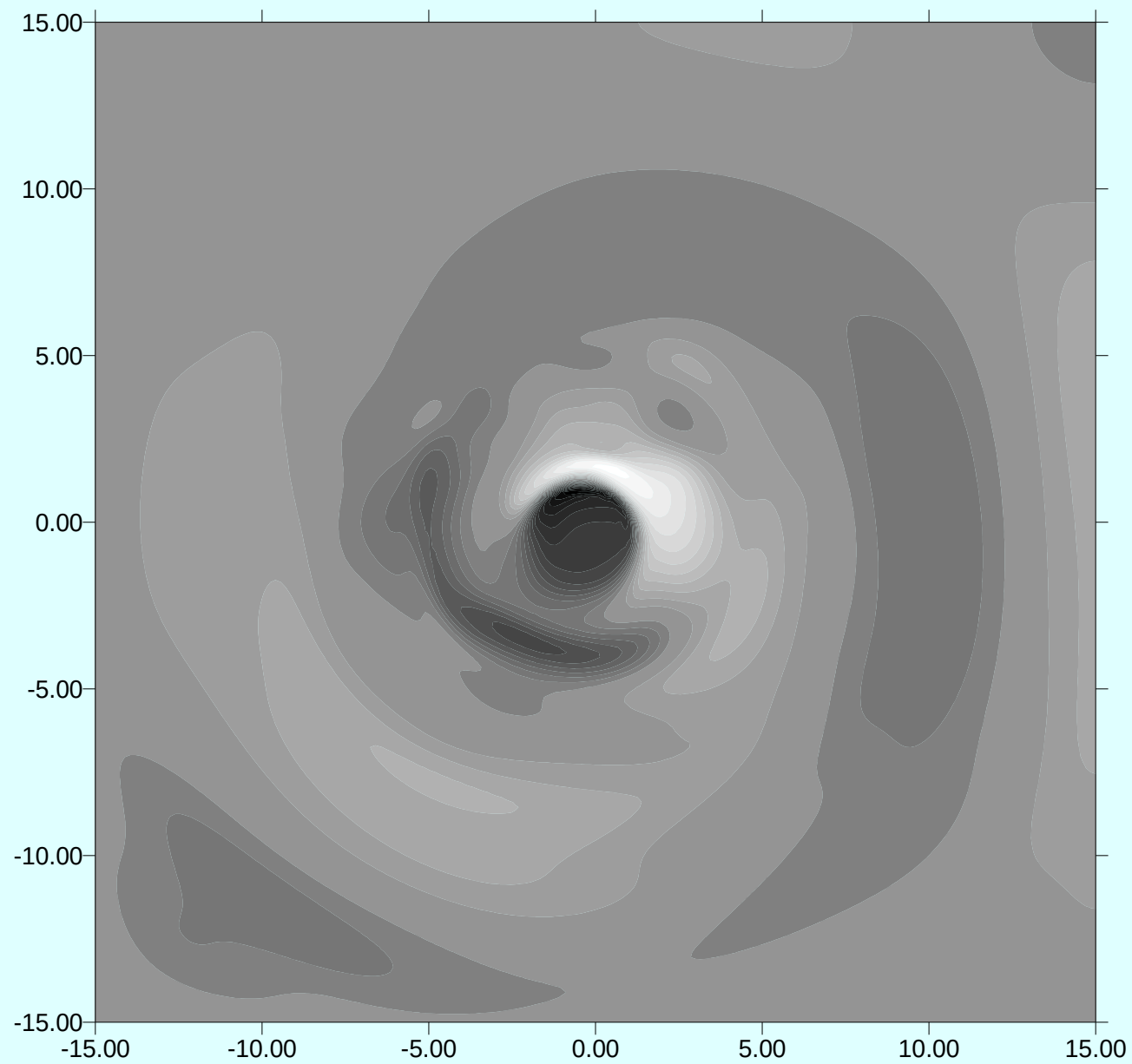


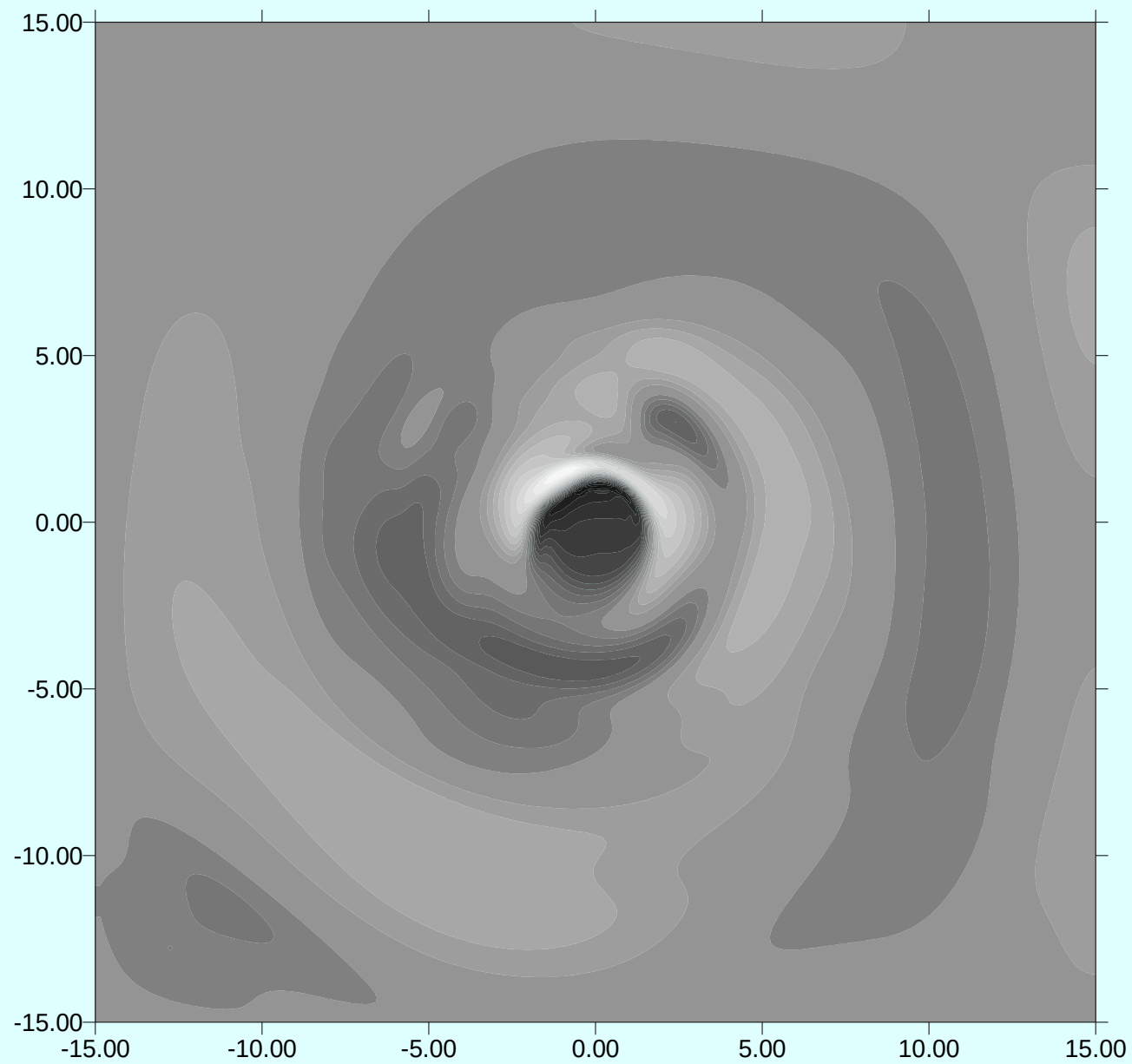


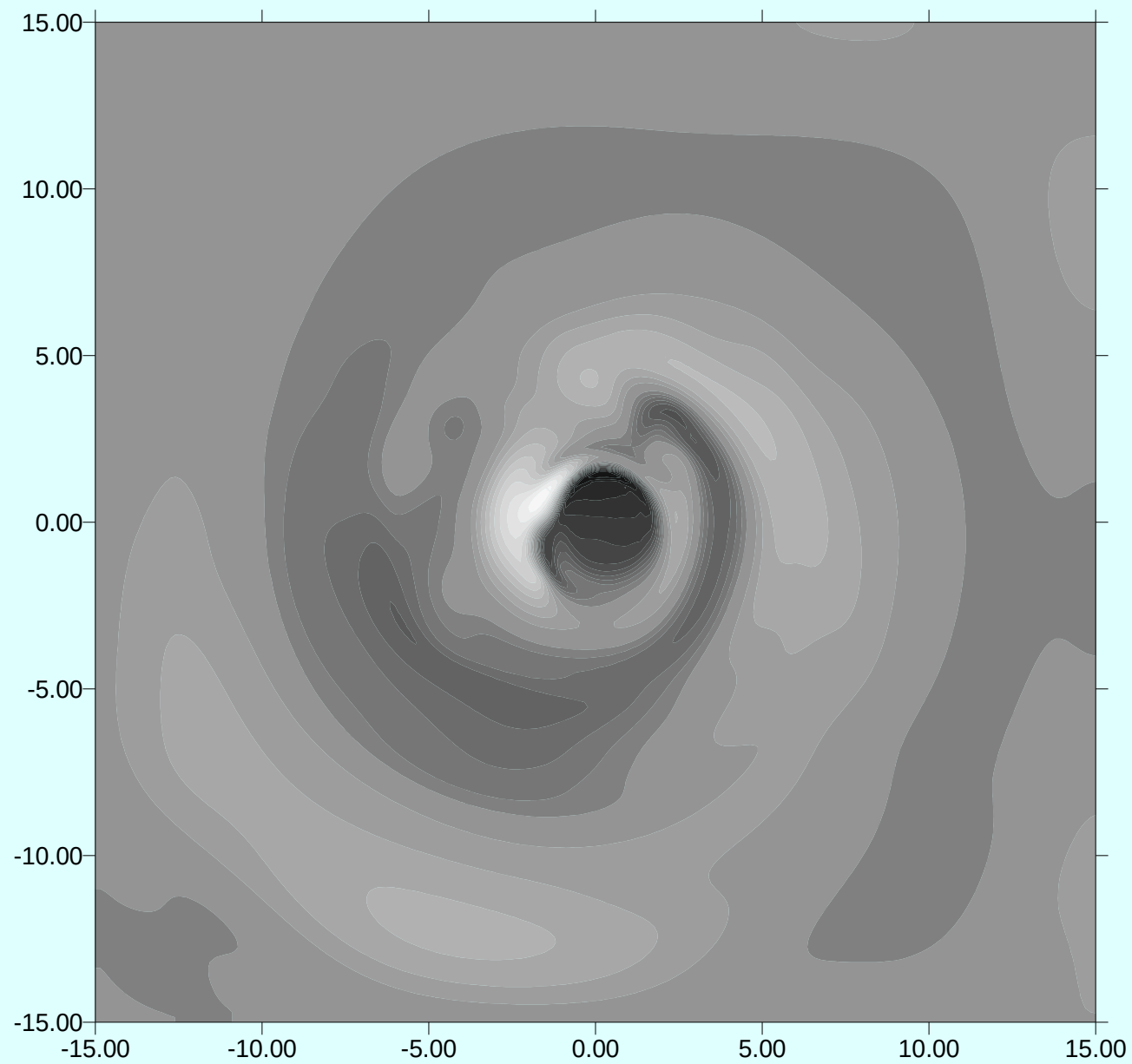
$$\text{Fr} = 4.0$$

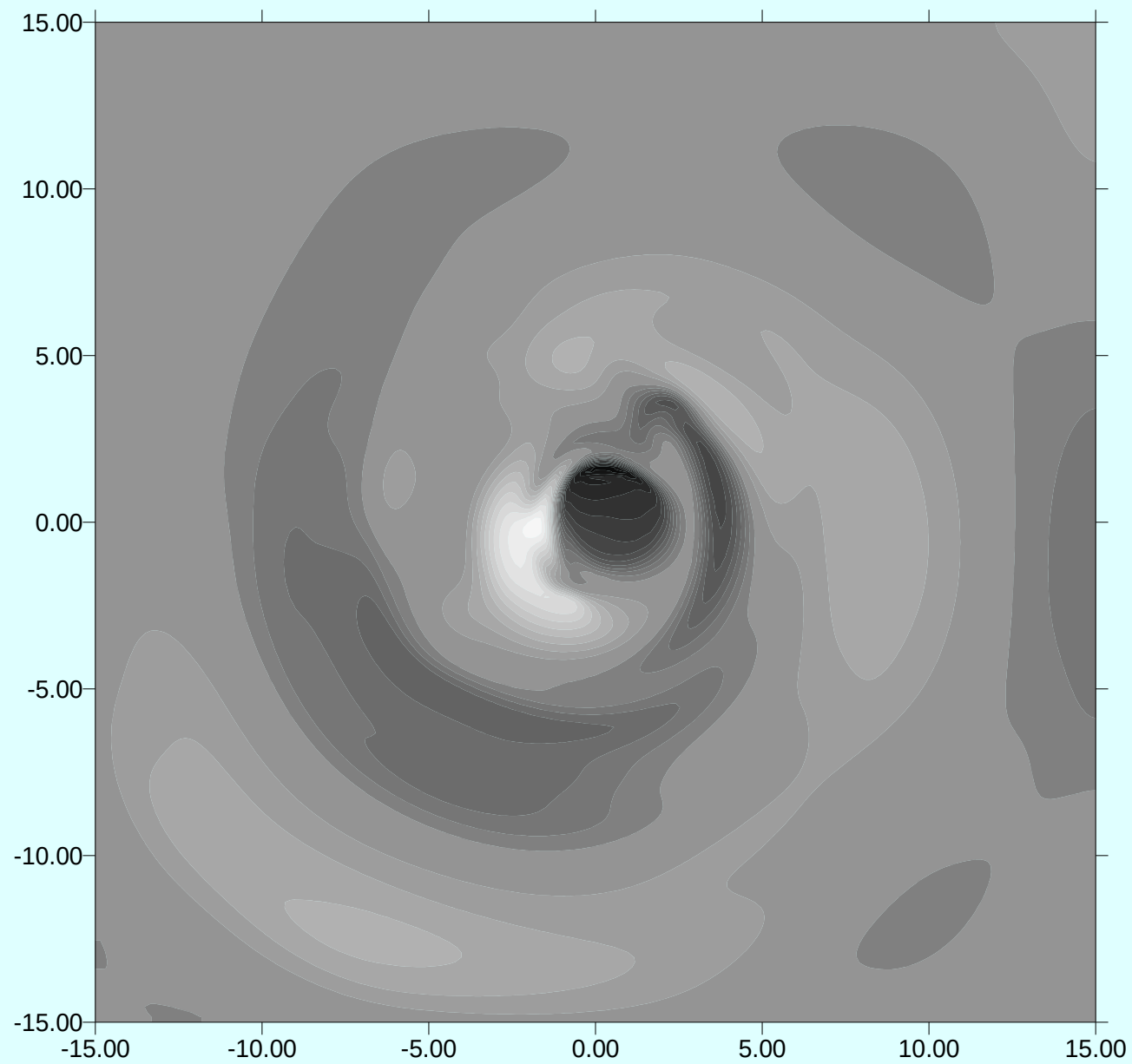


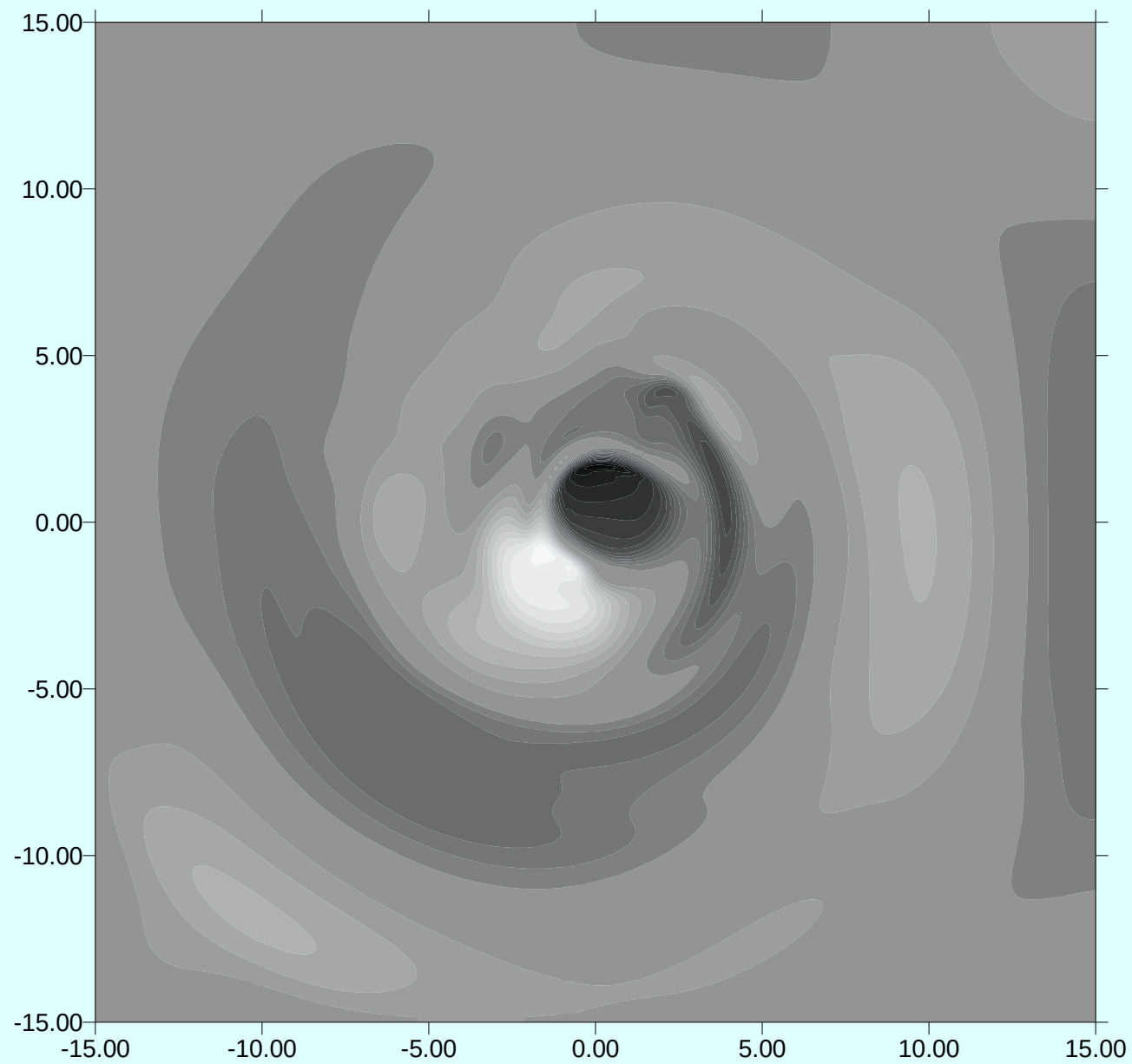


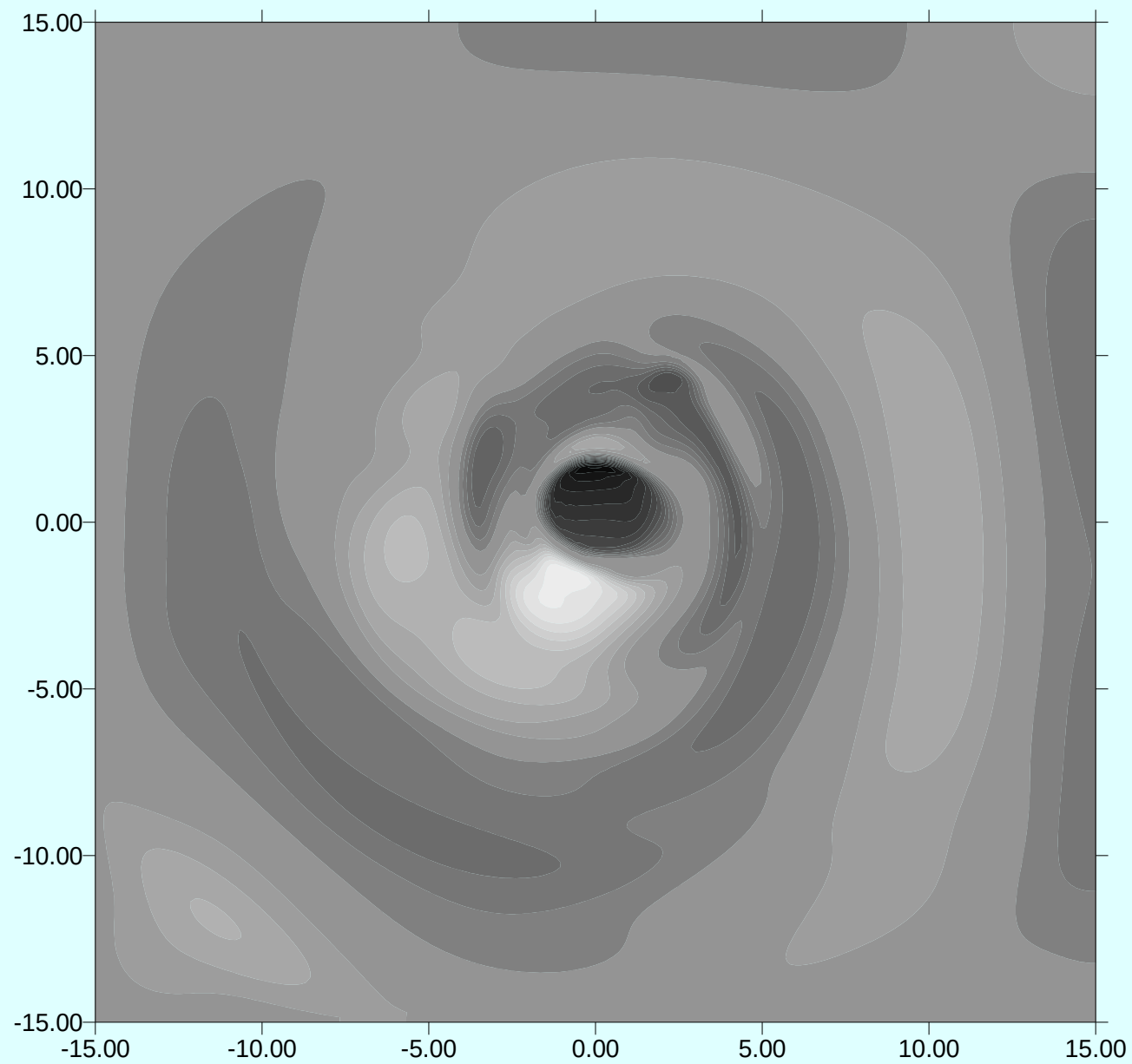


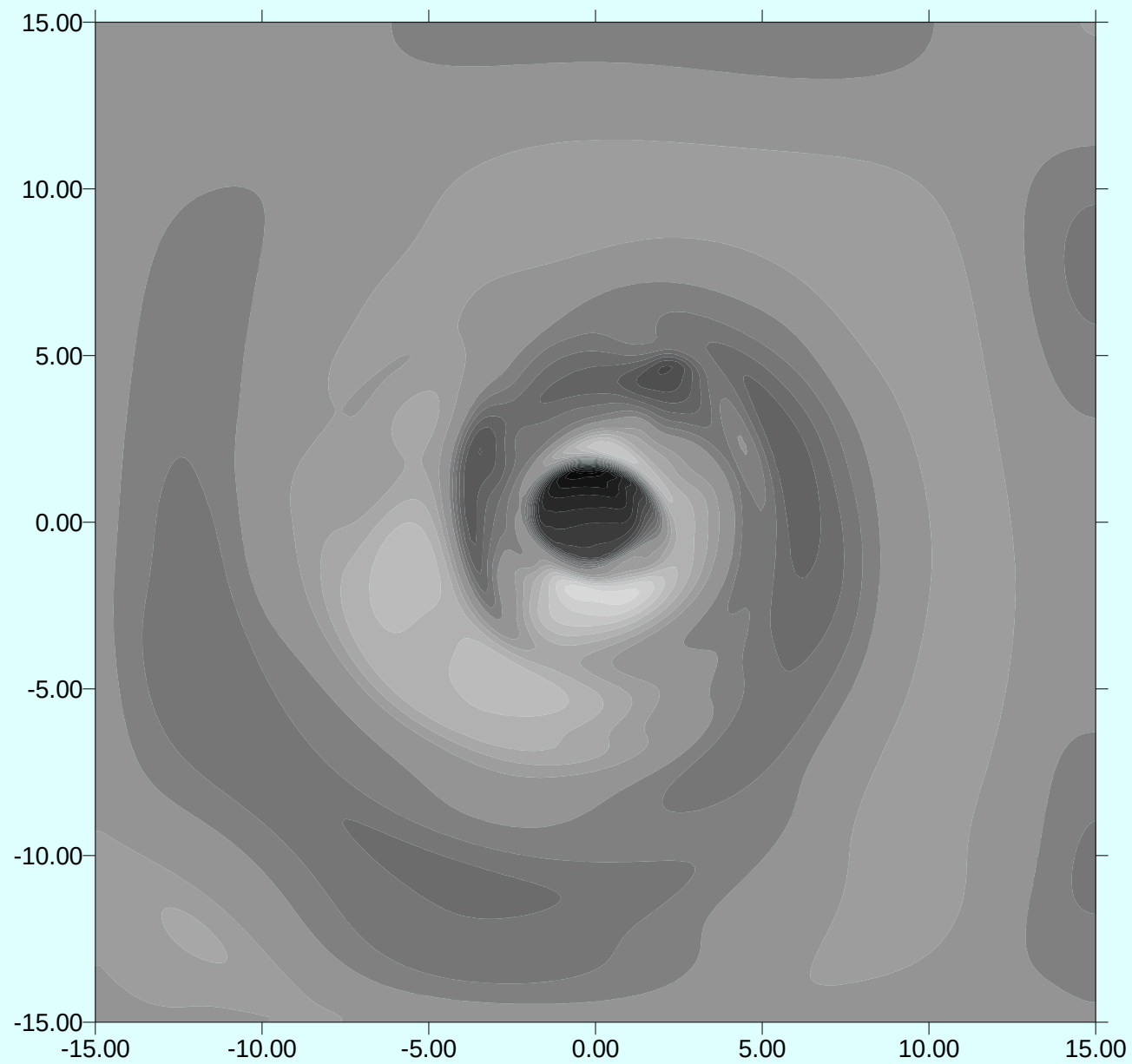


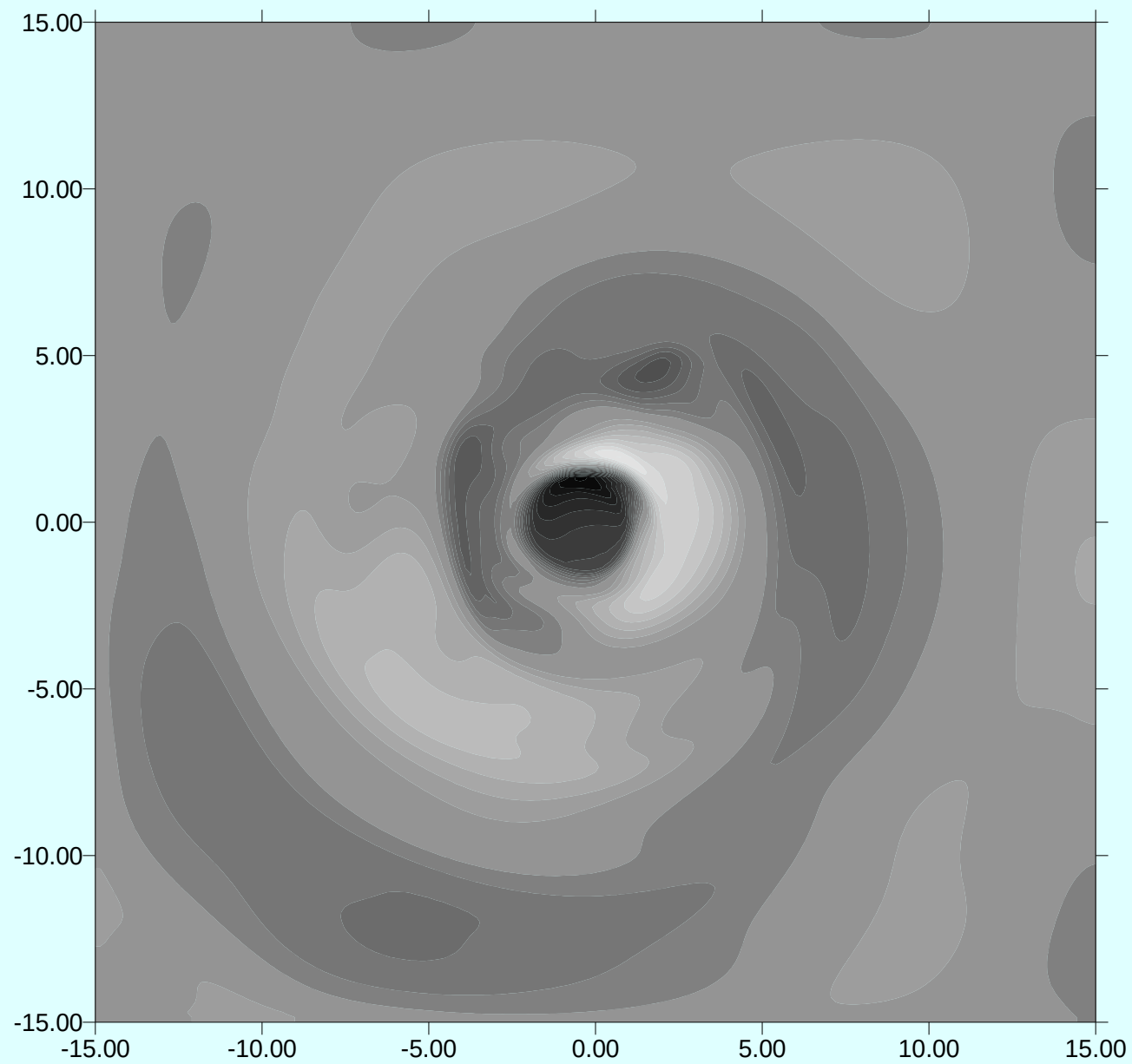


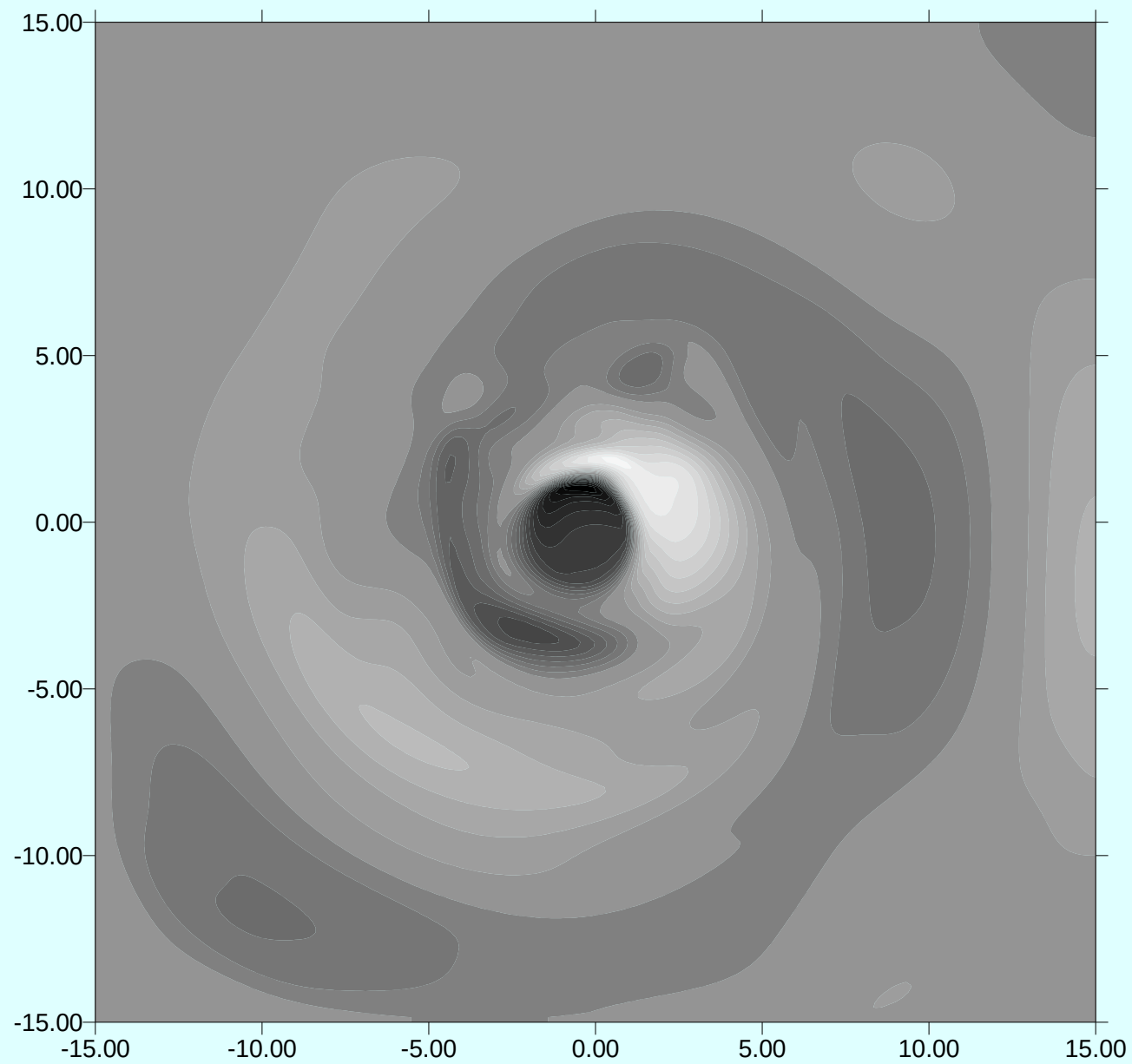


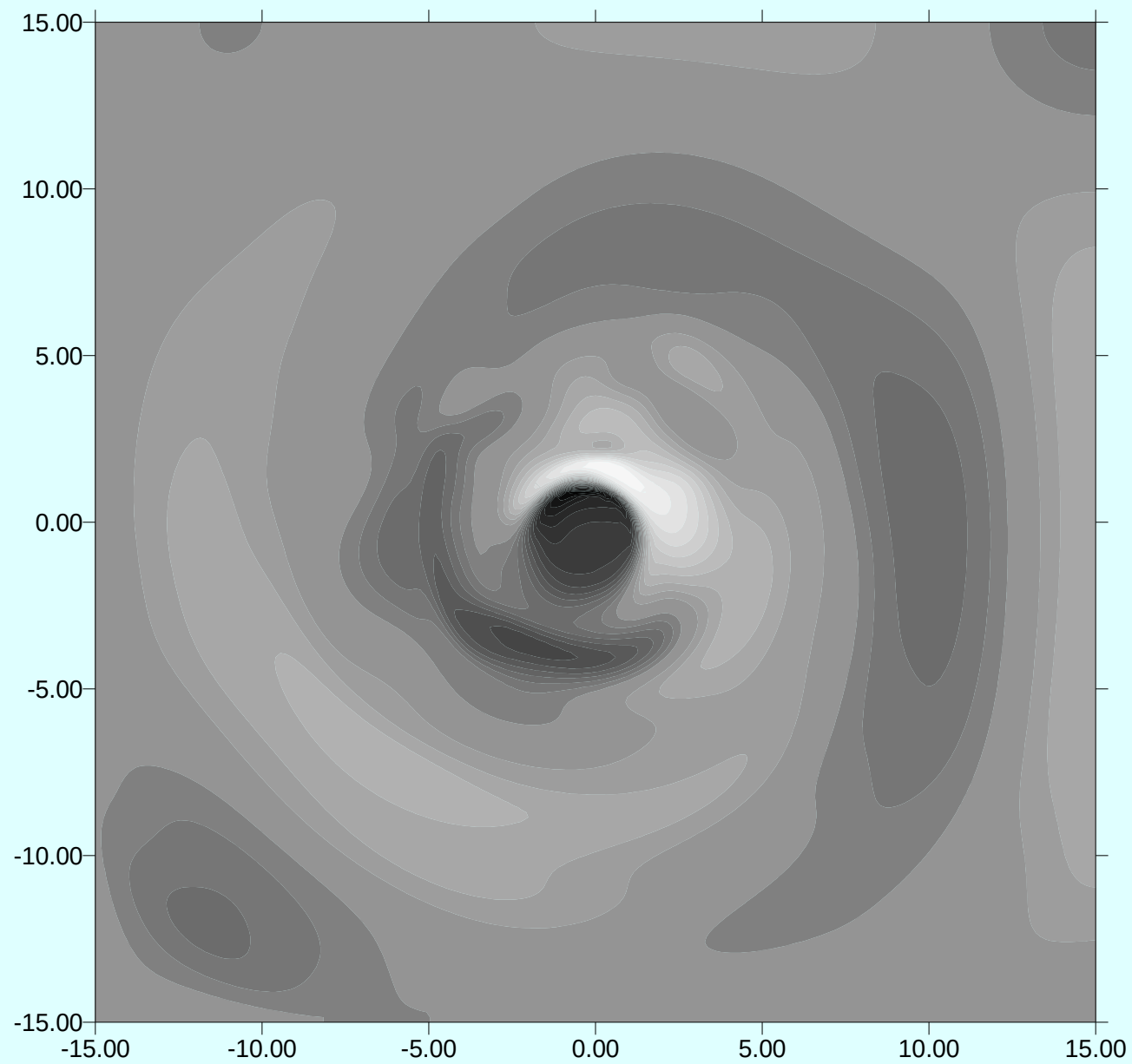


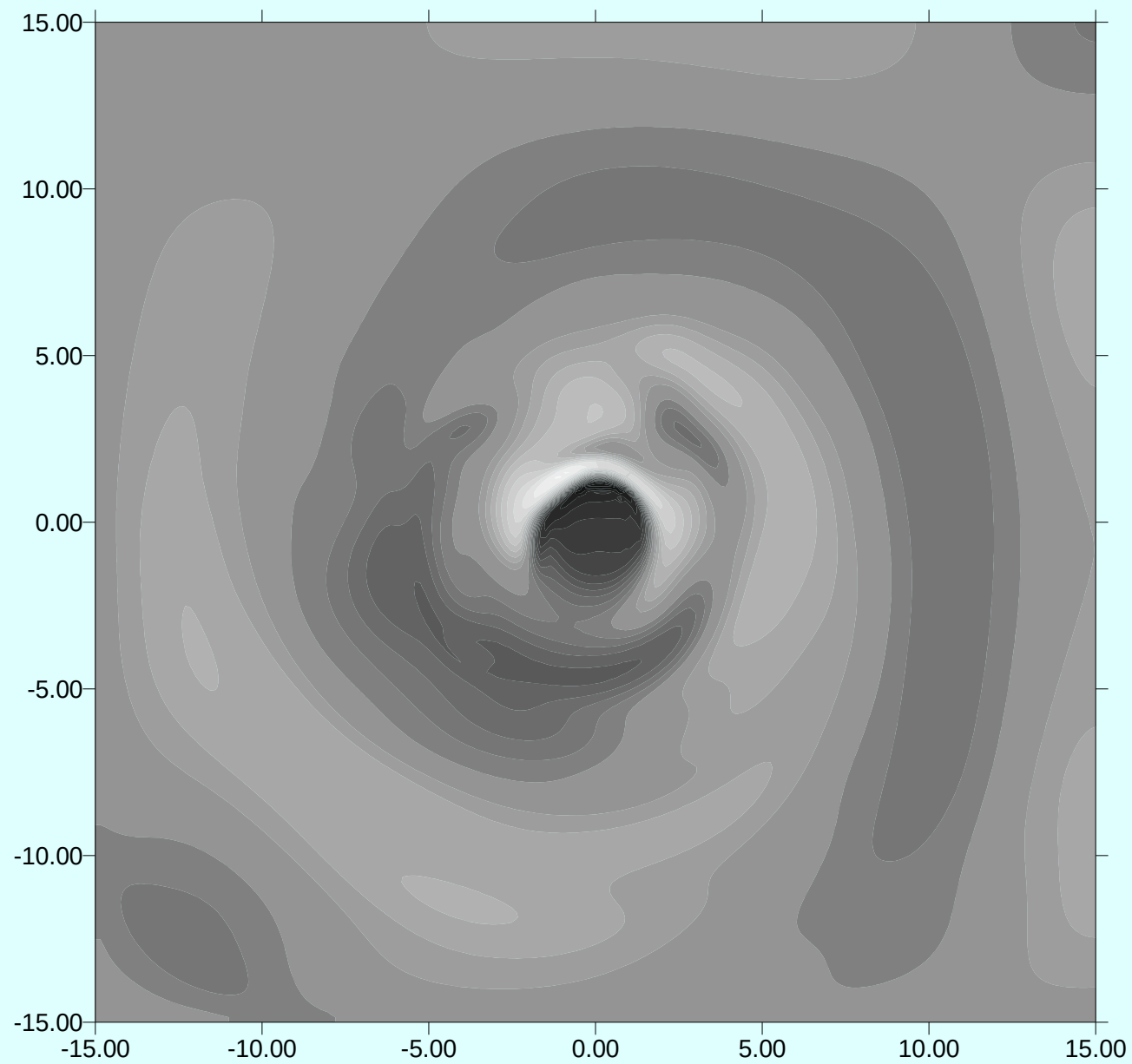


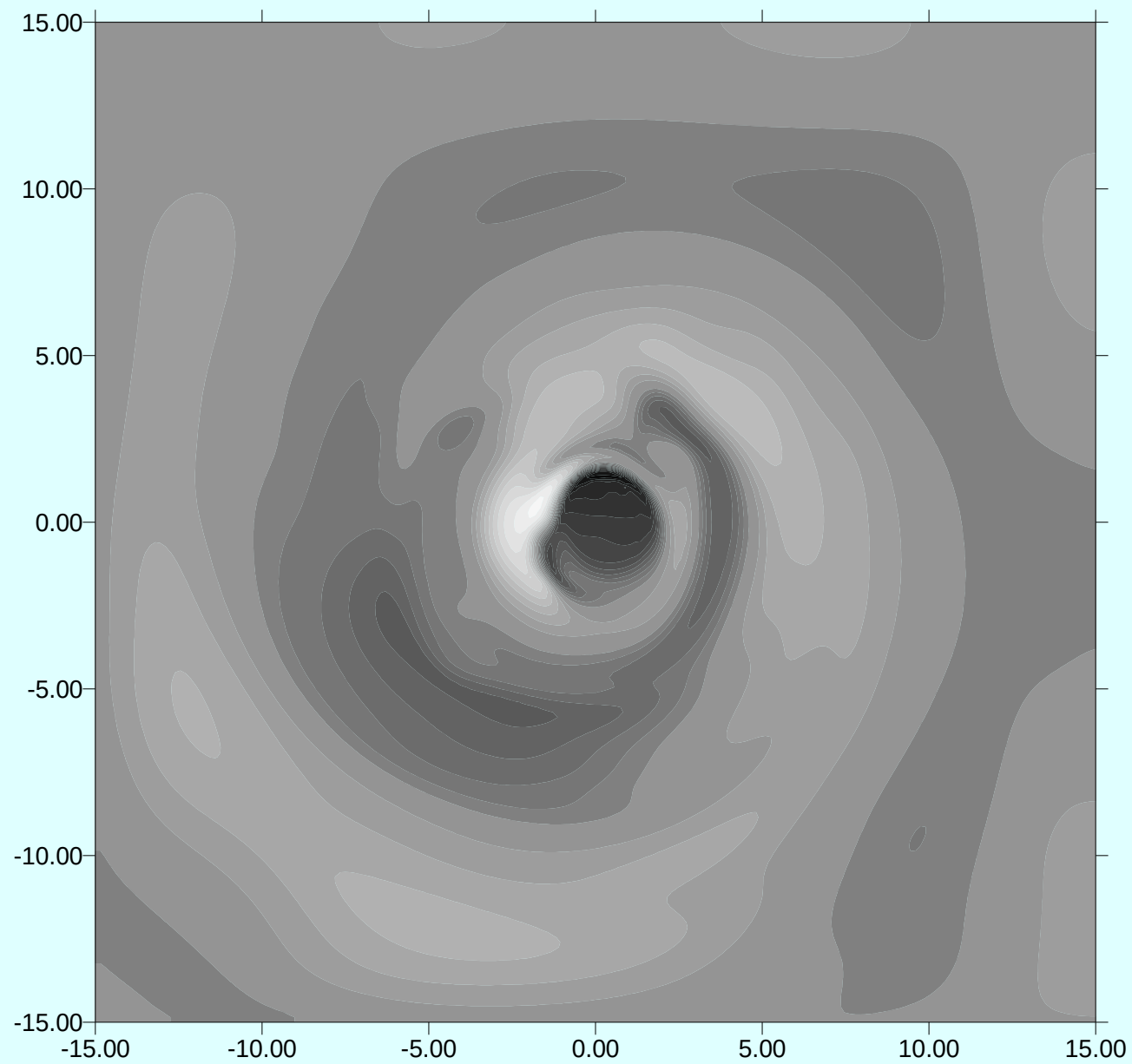


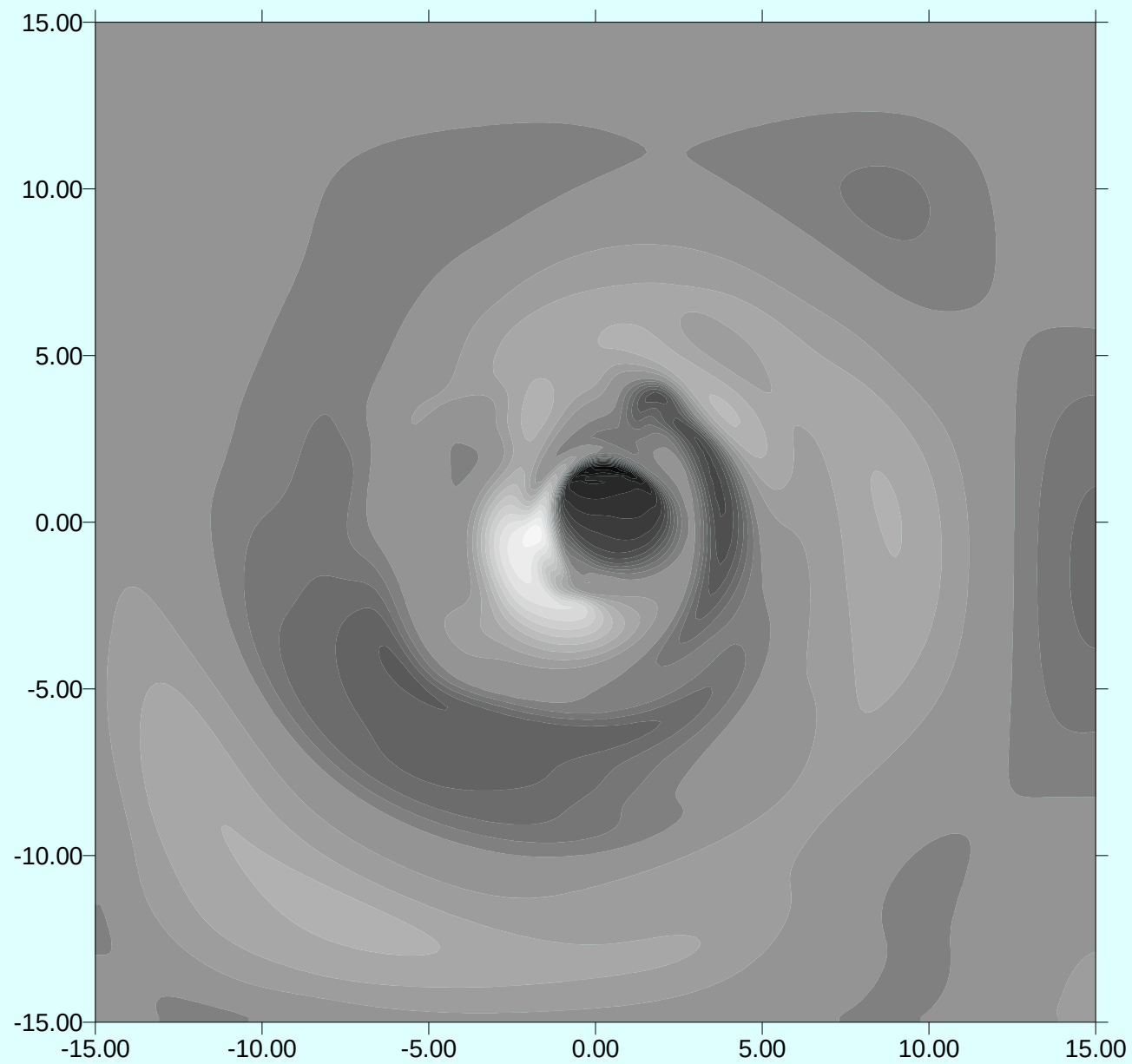


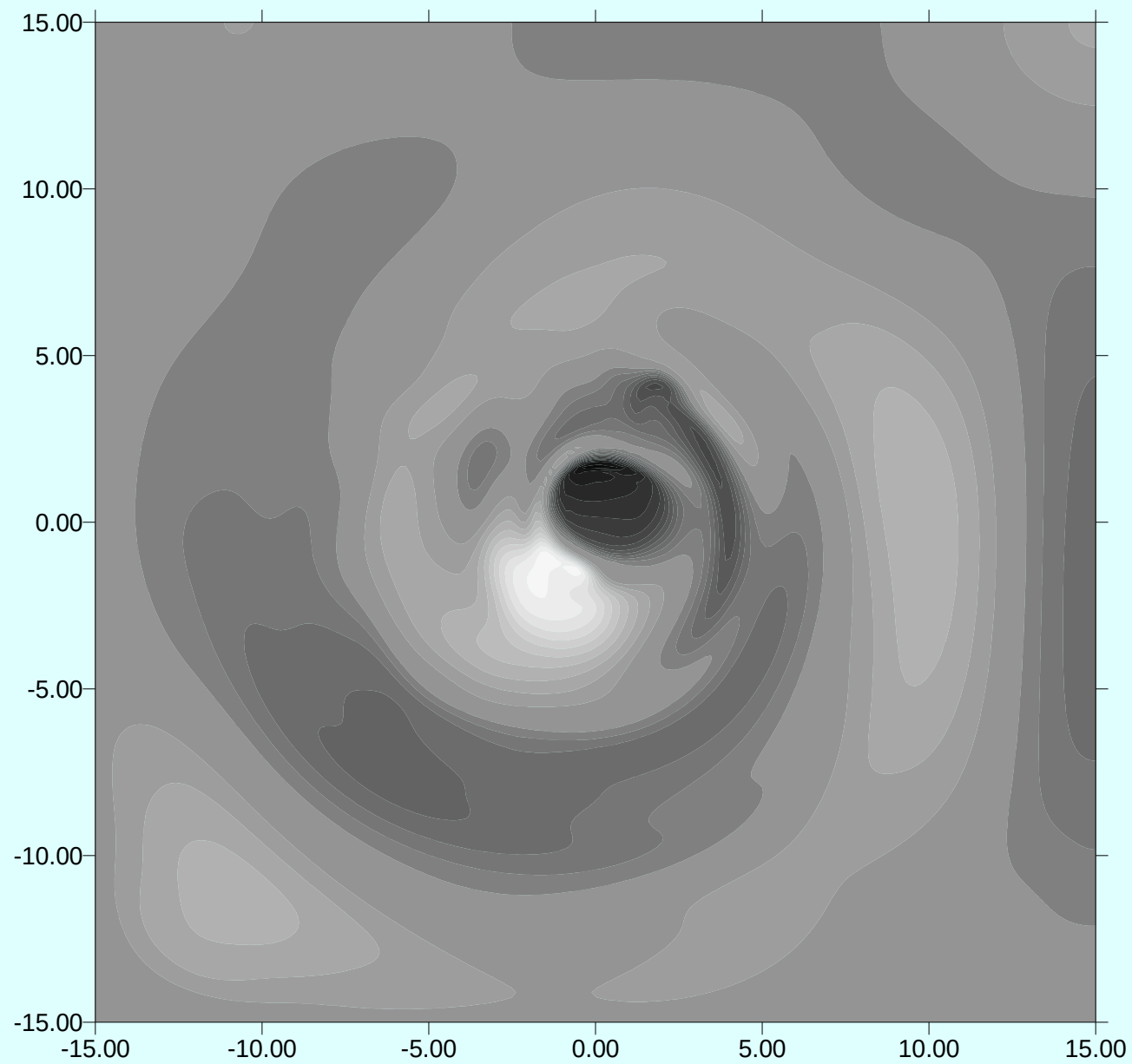


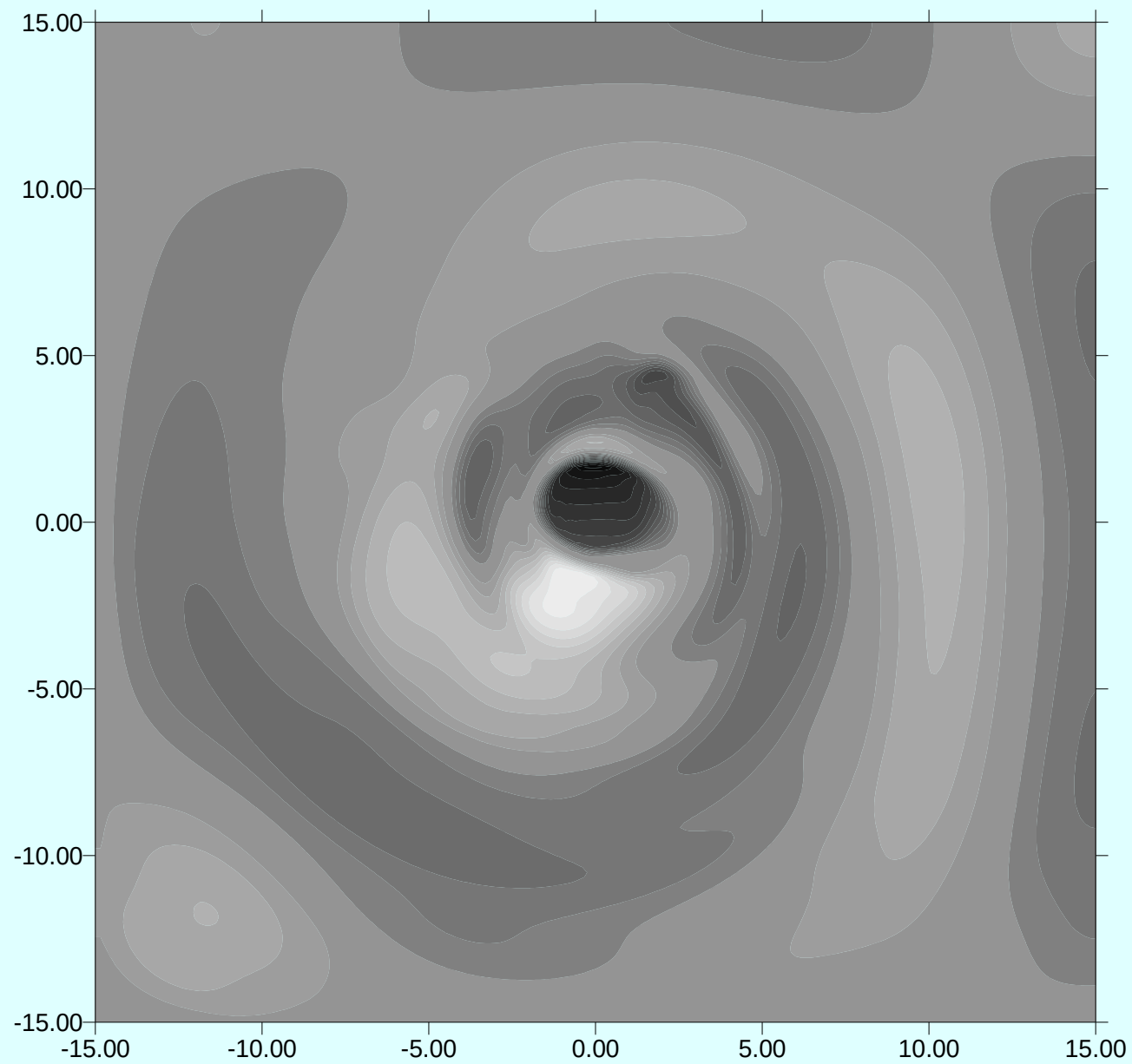


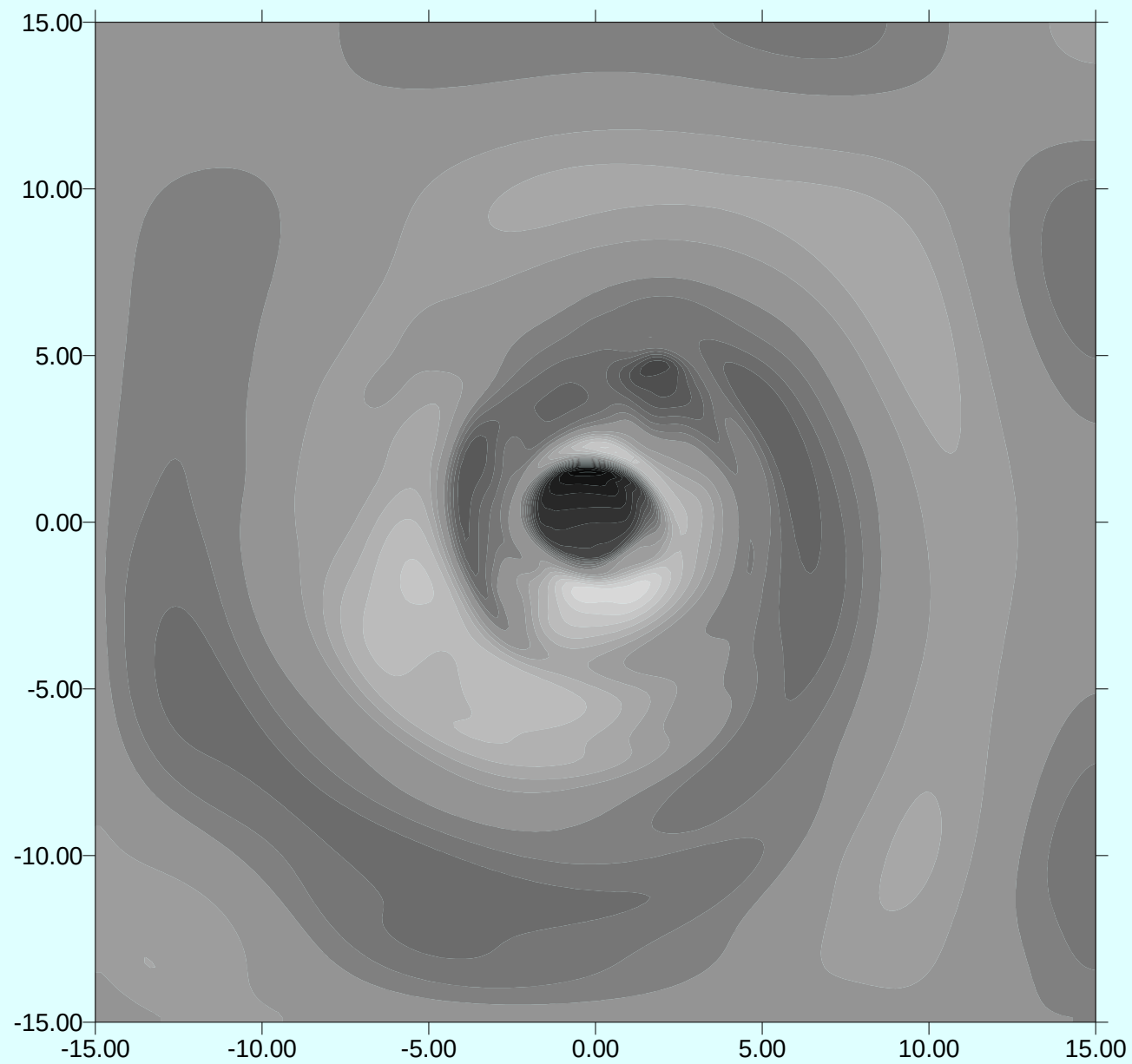


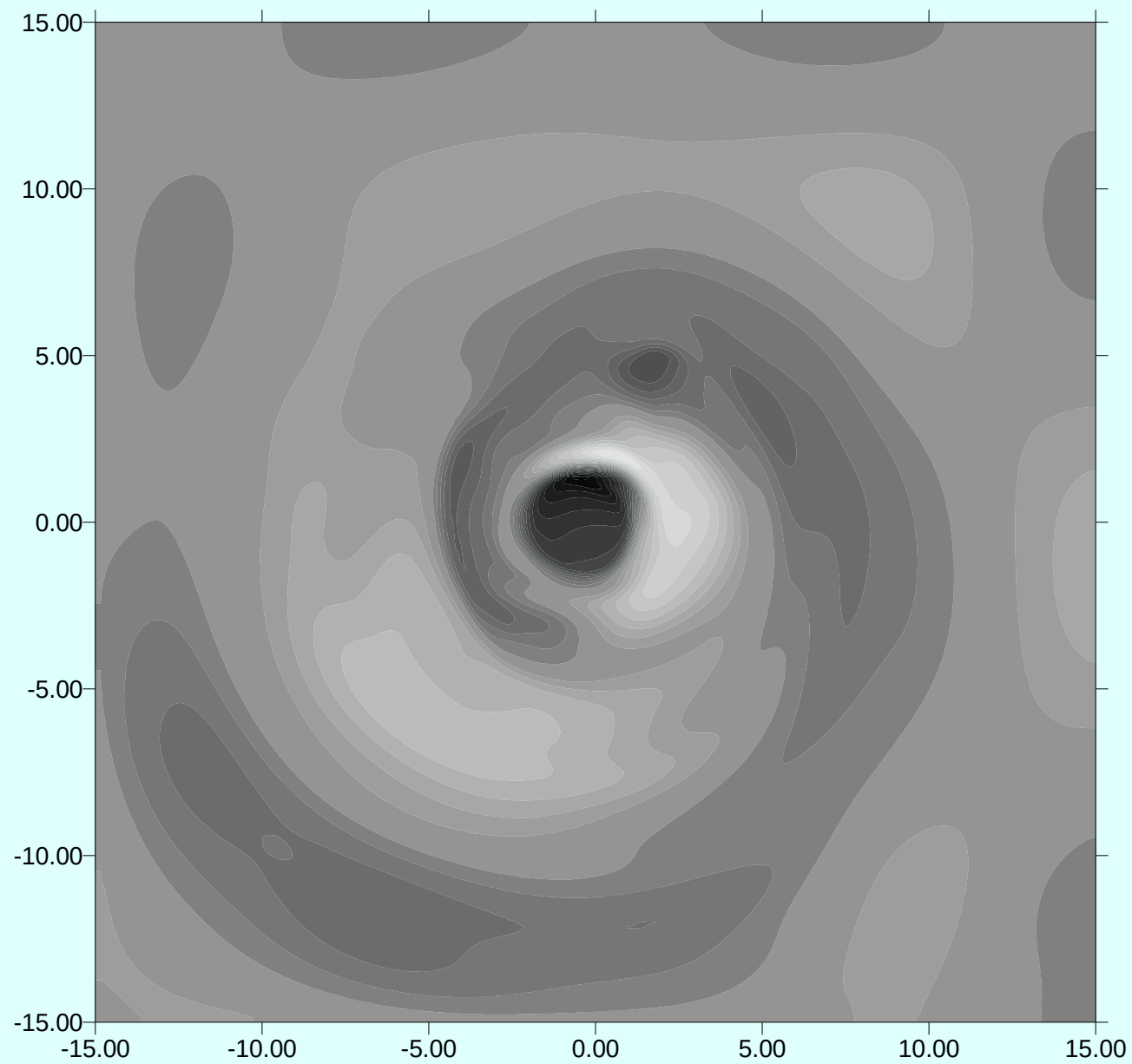


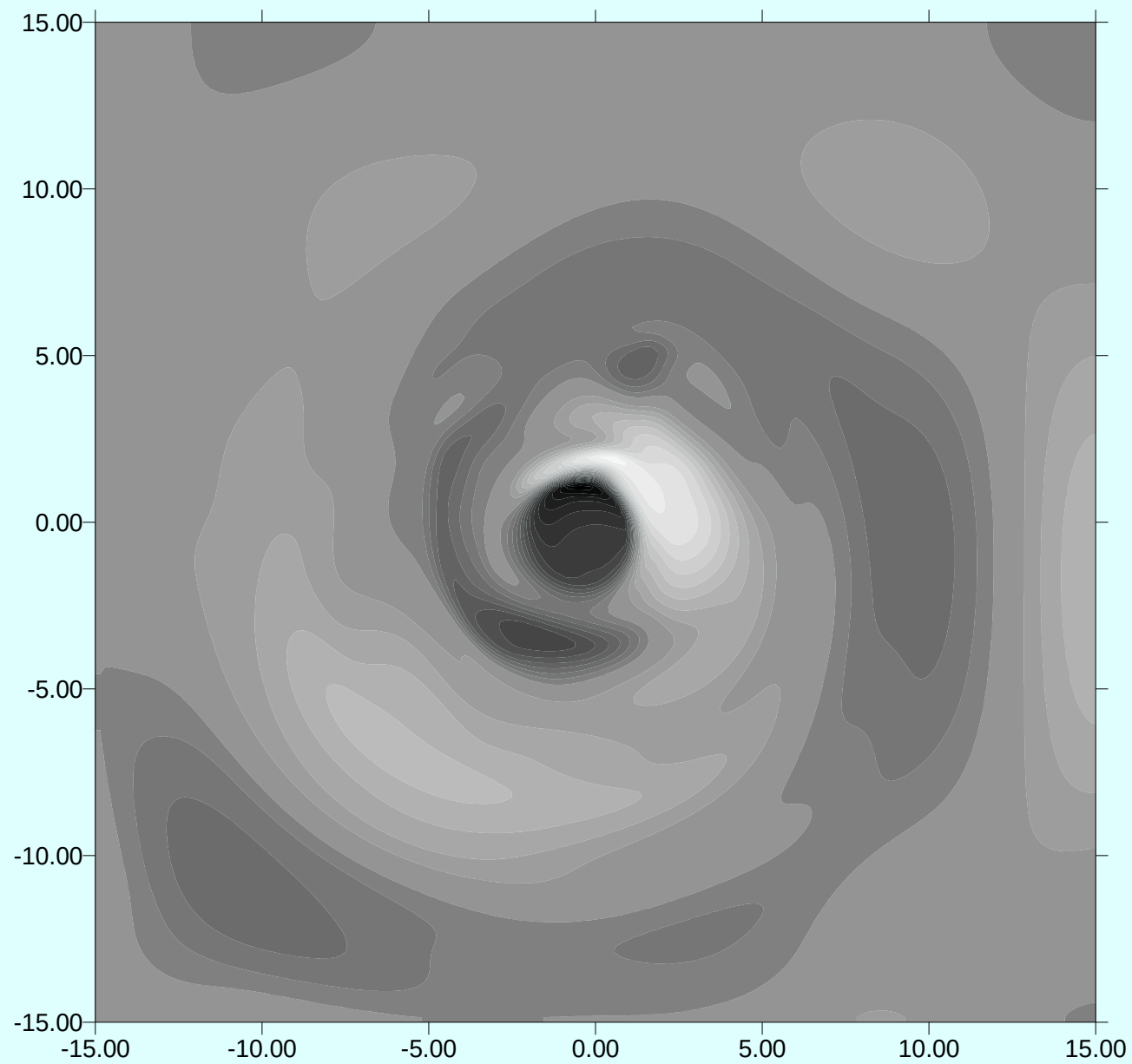


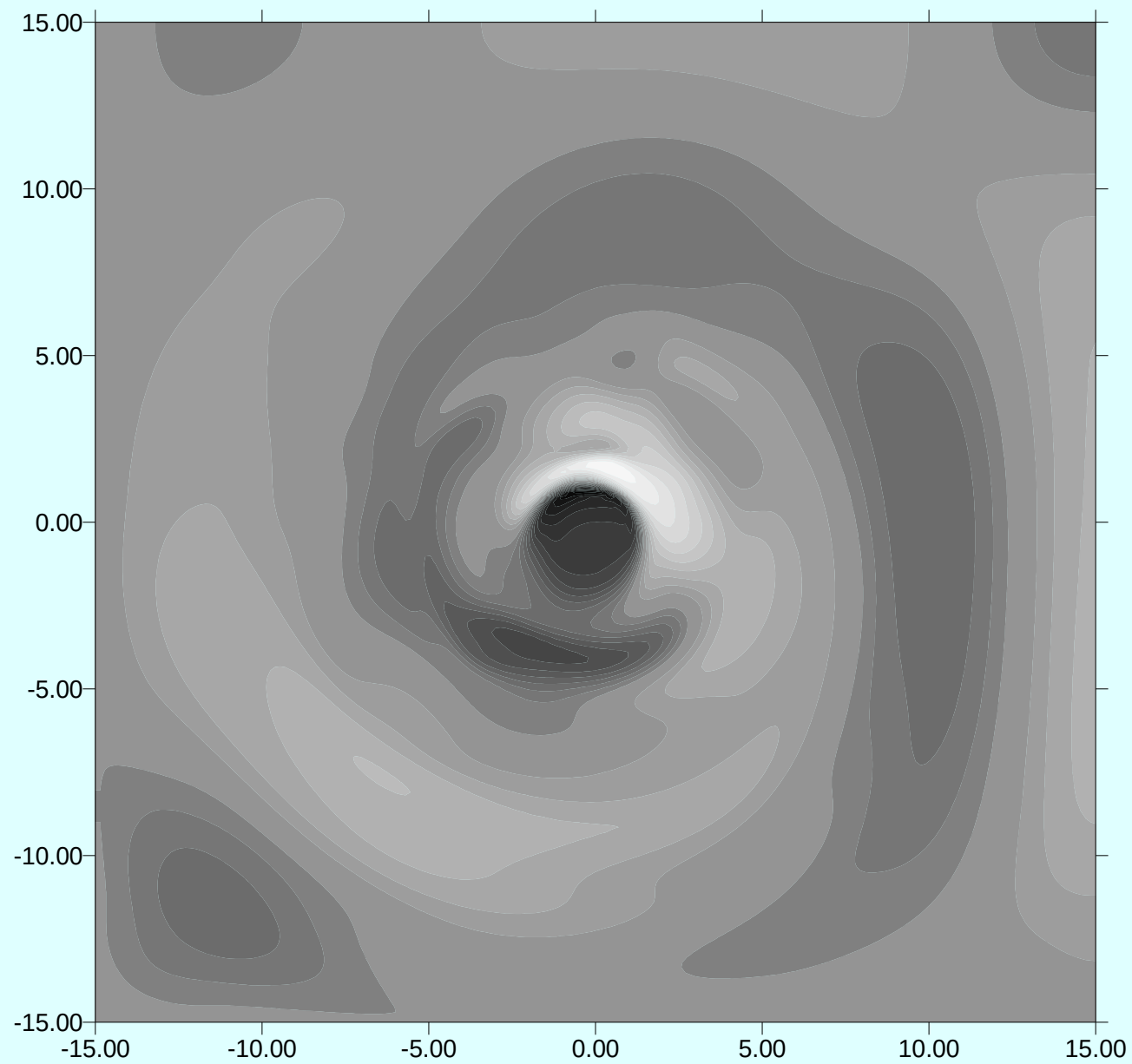


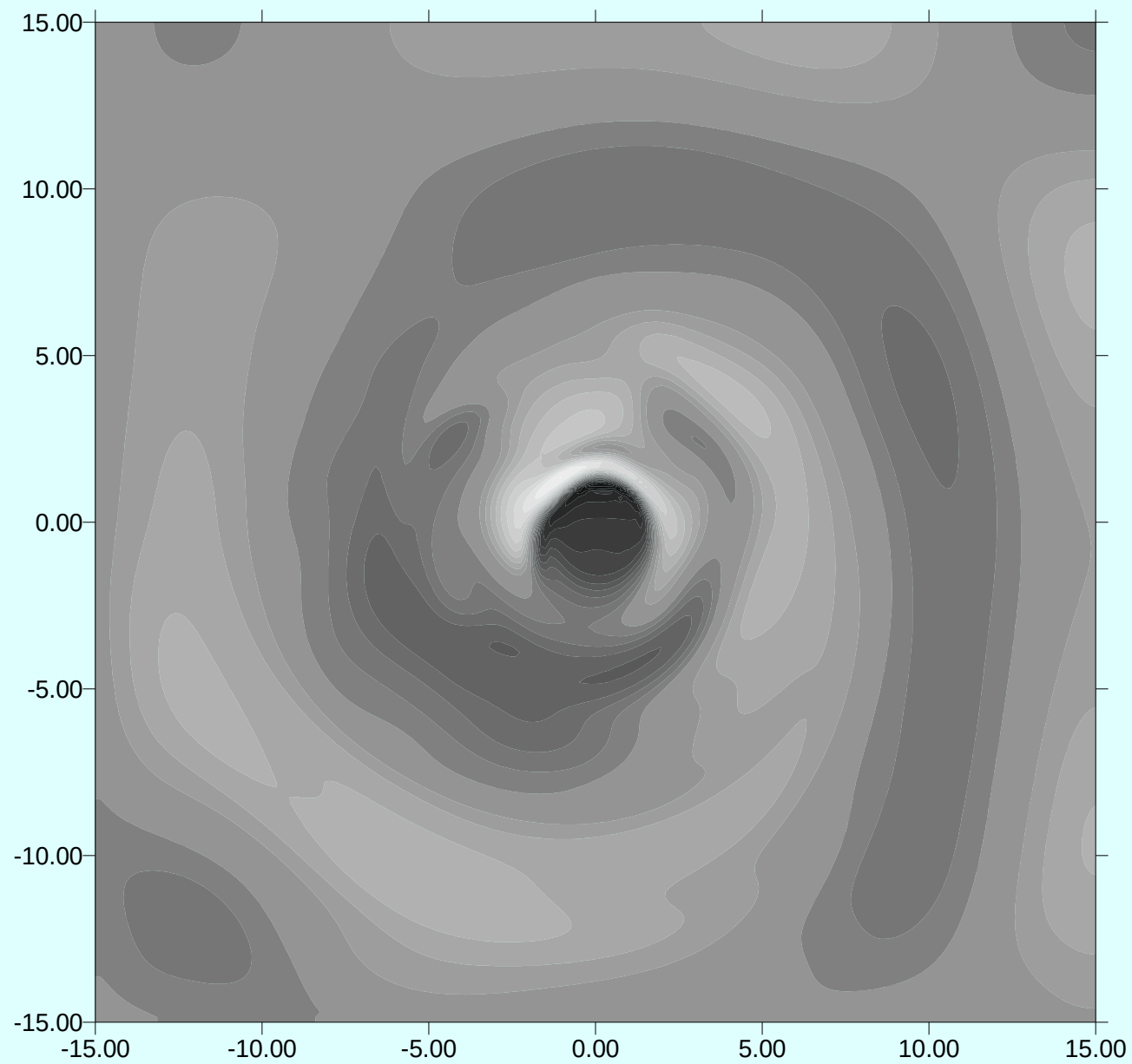


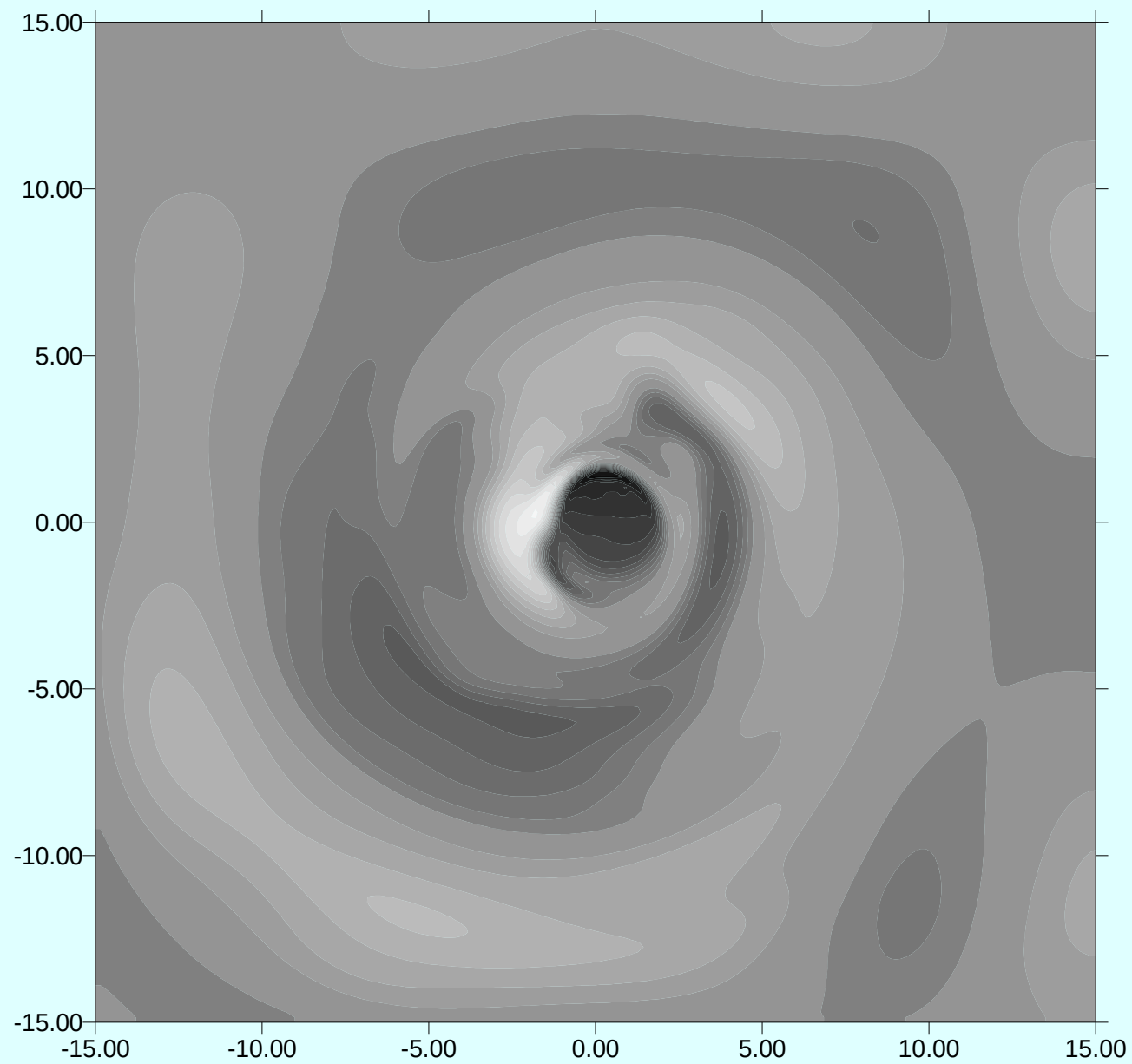


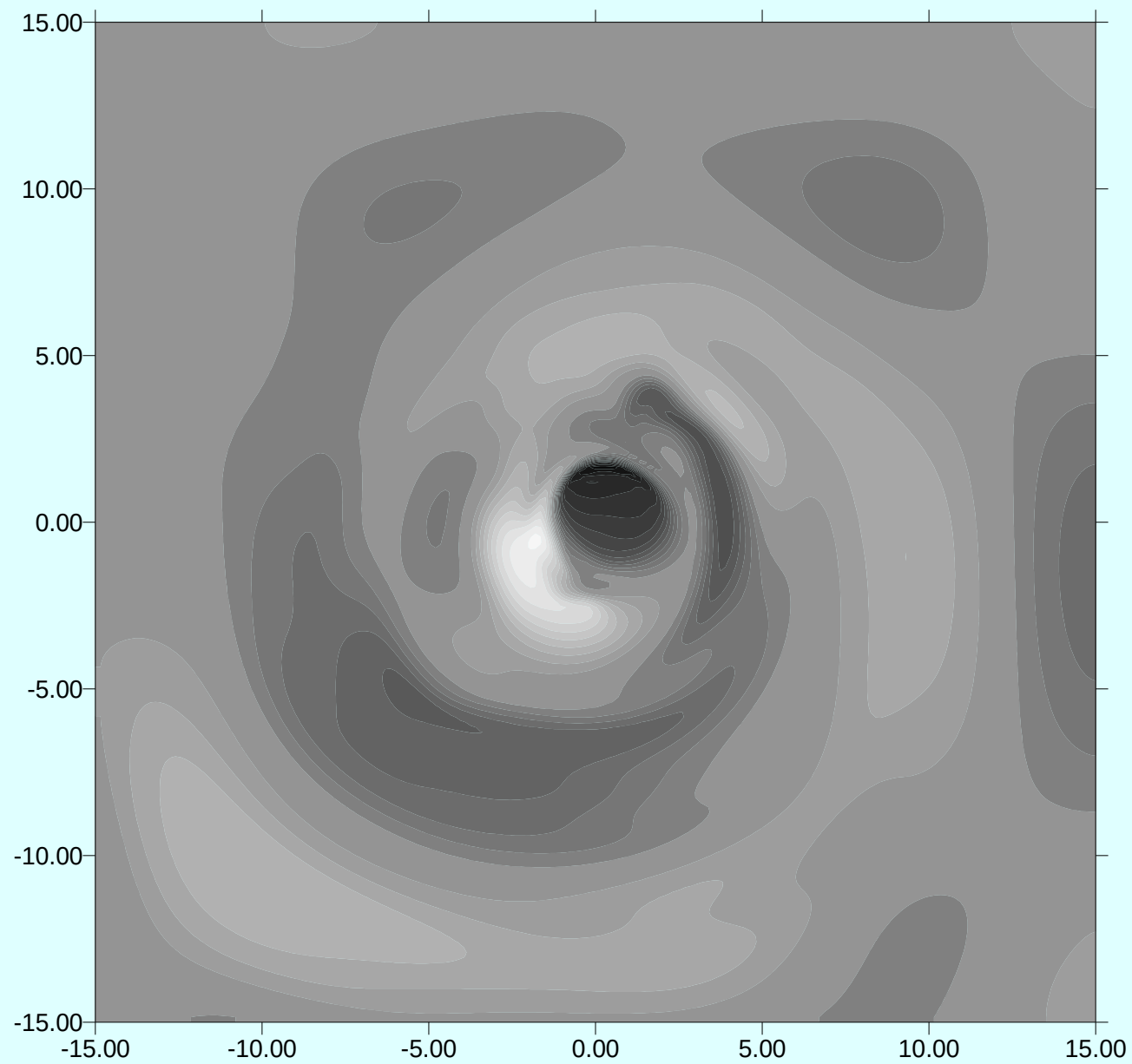


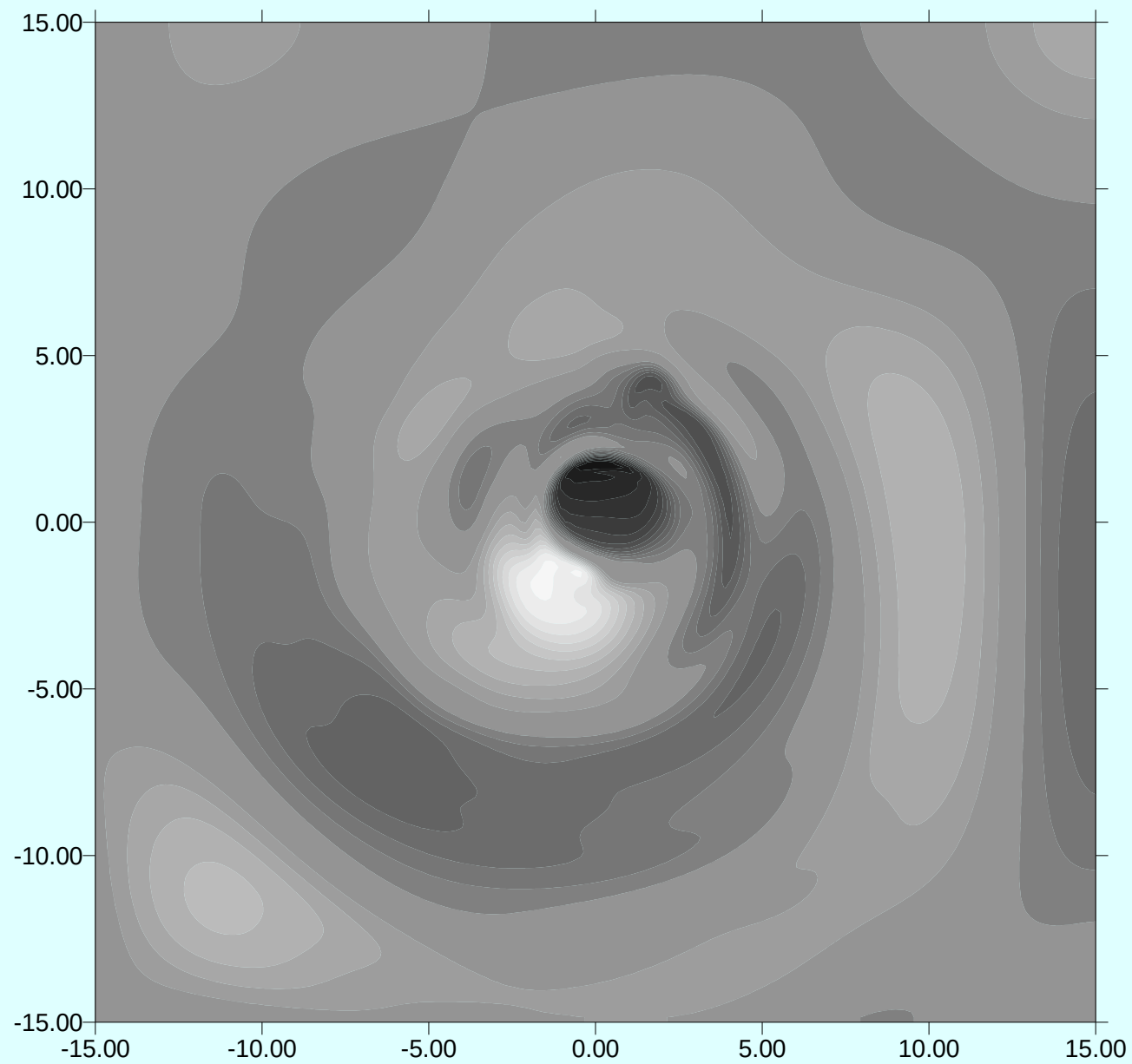


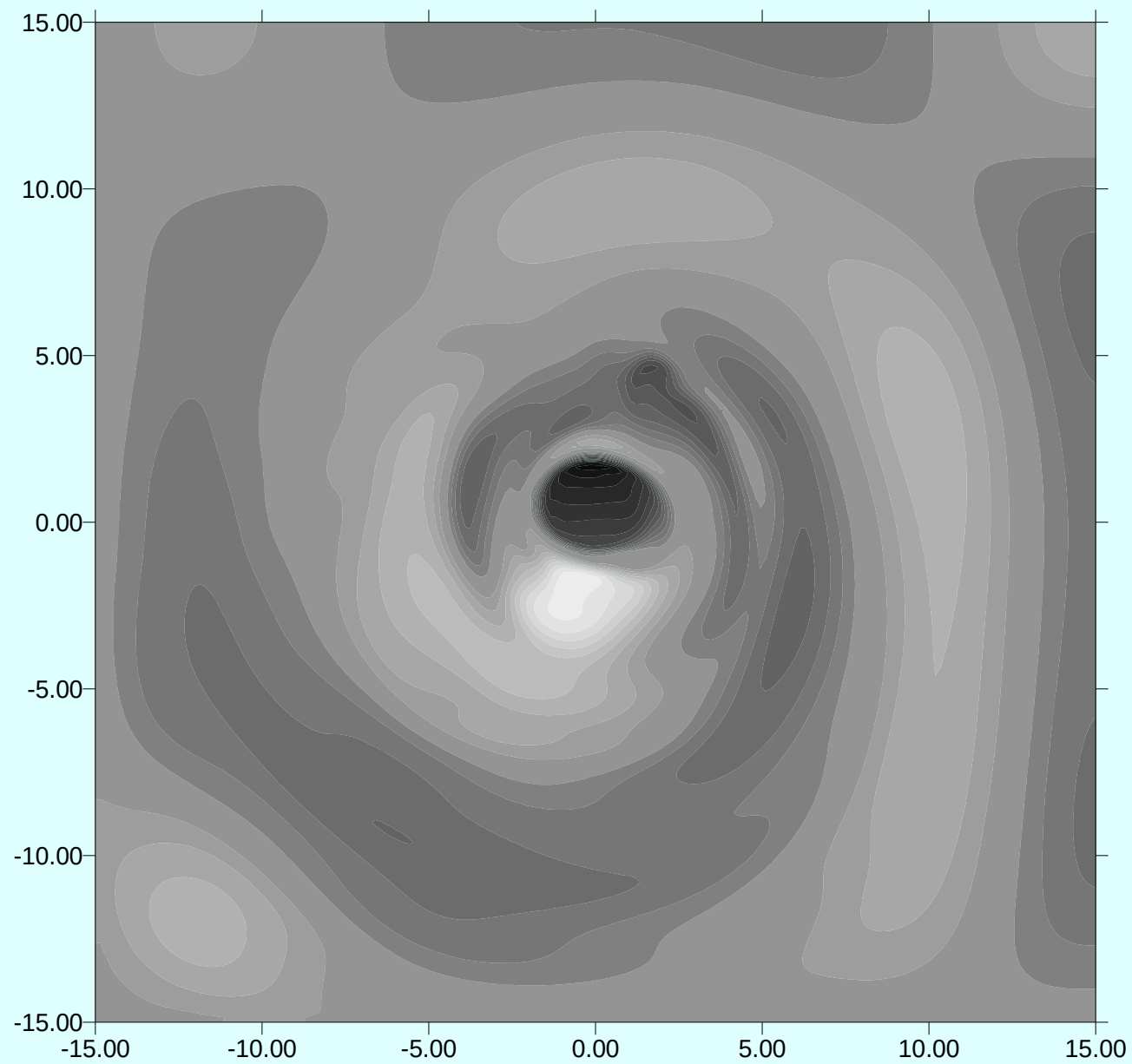


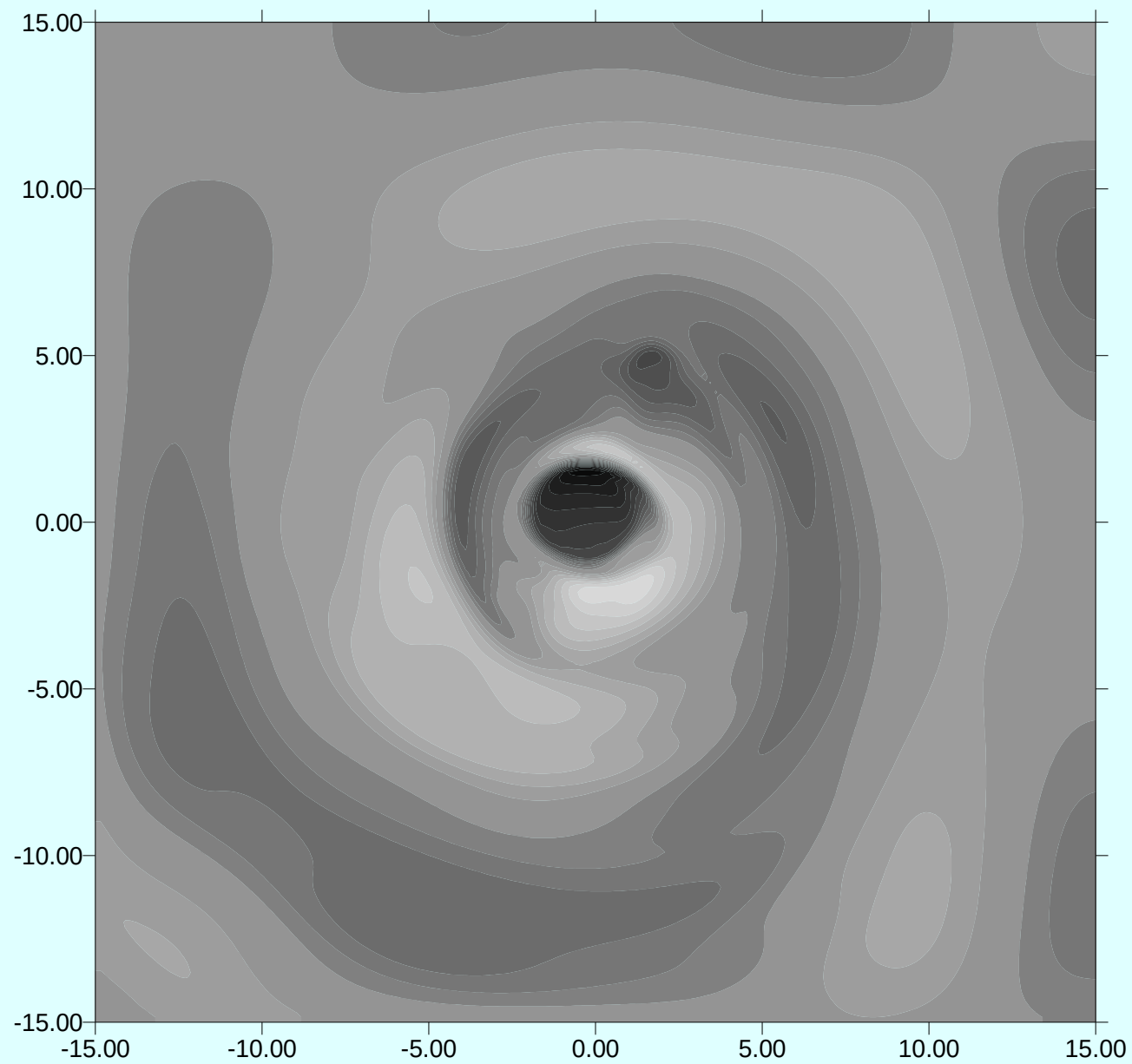


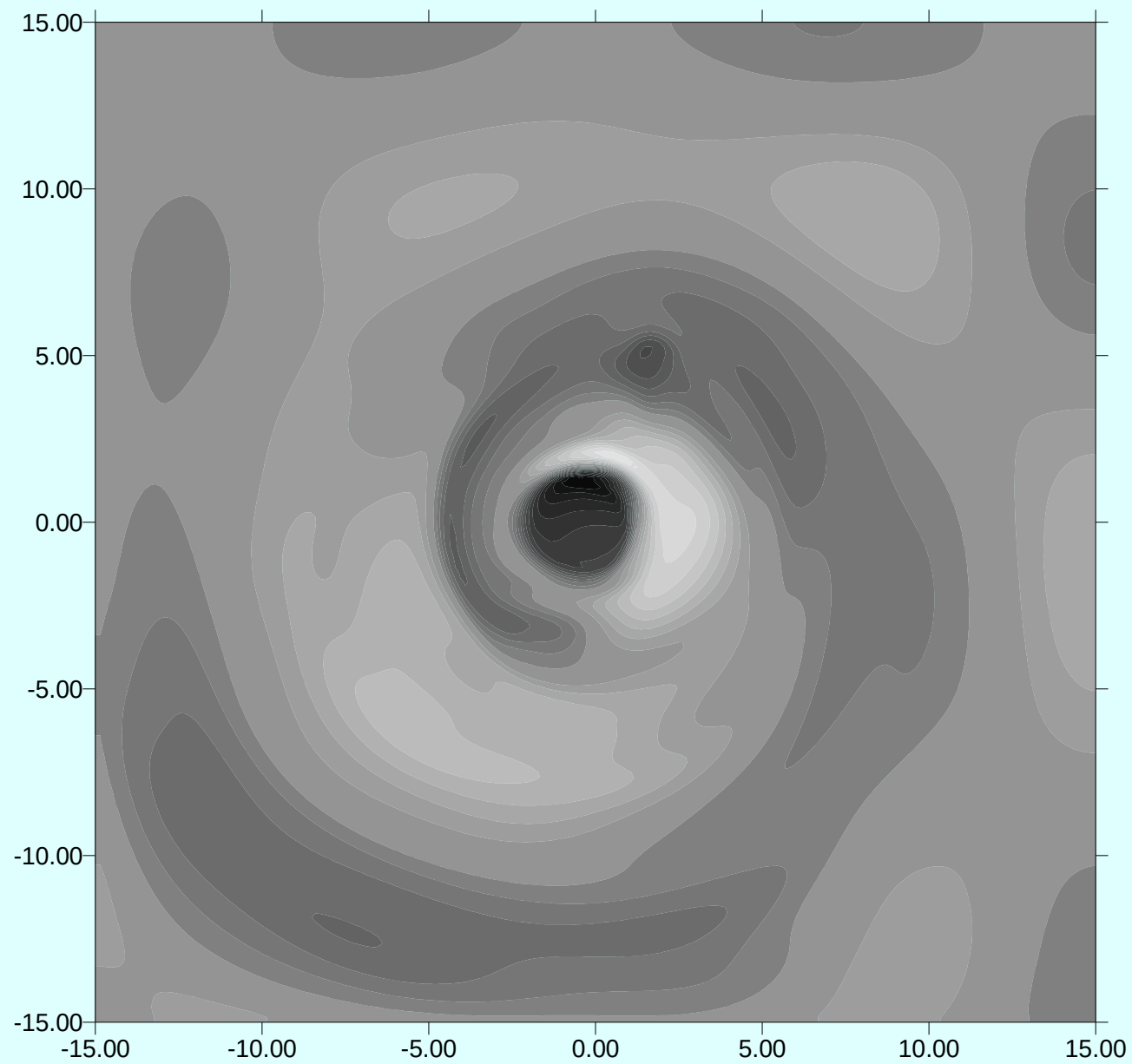


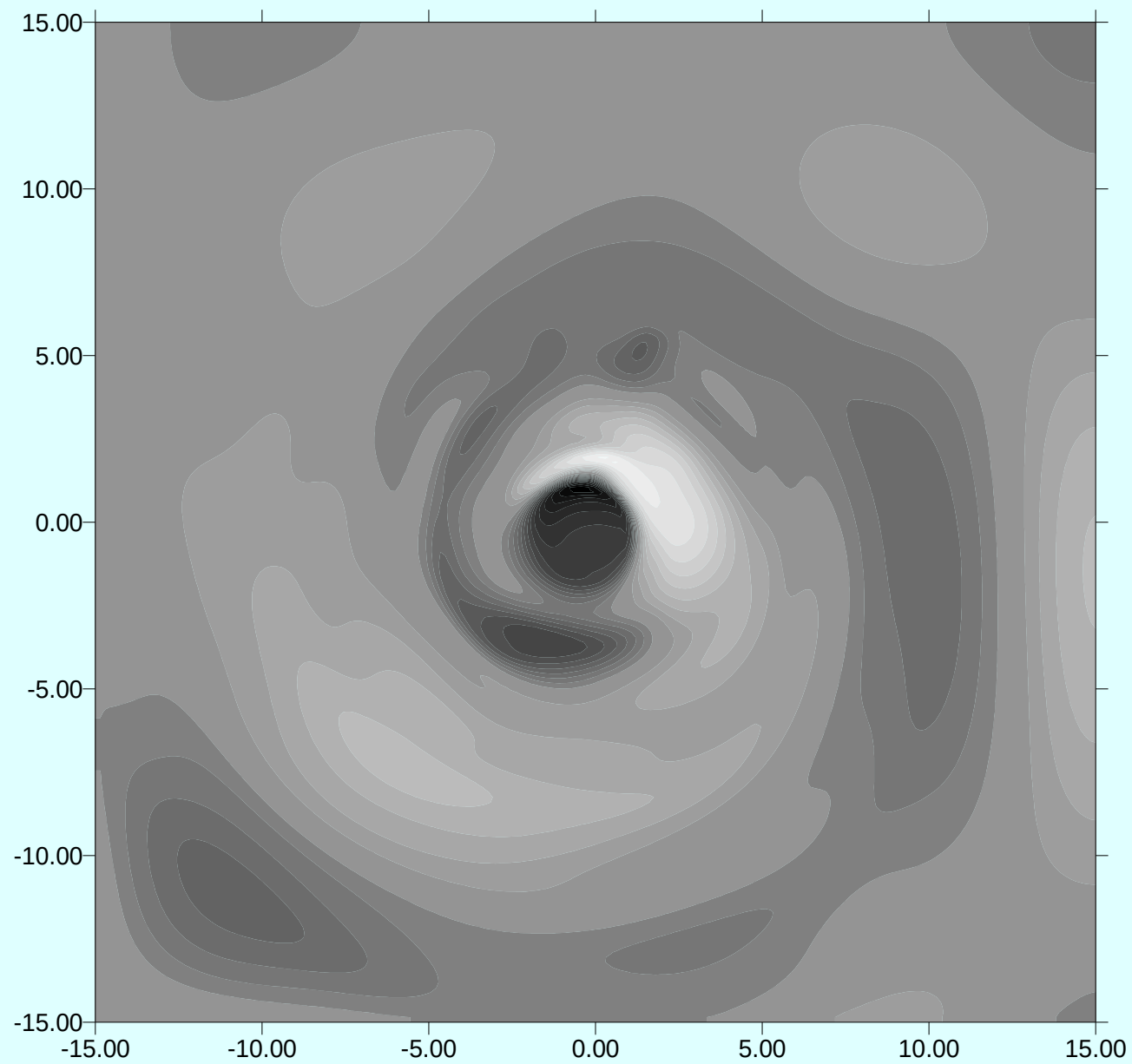


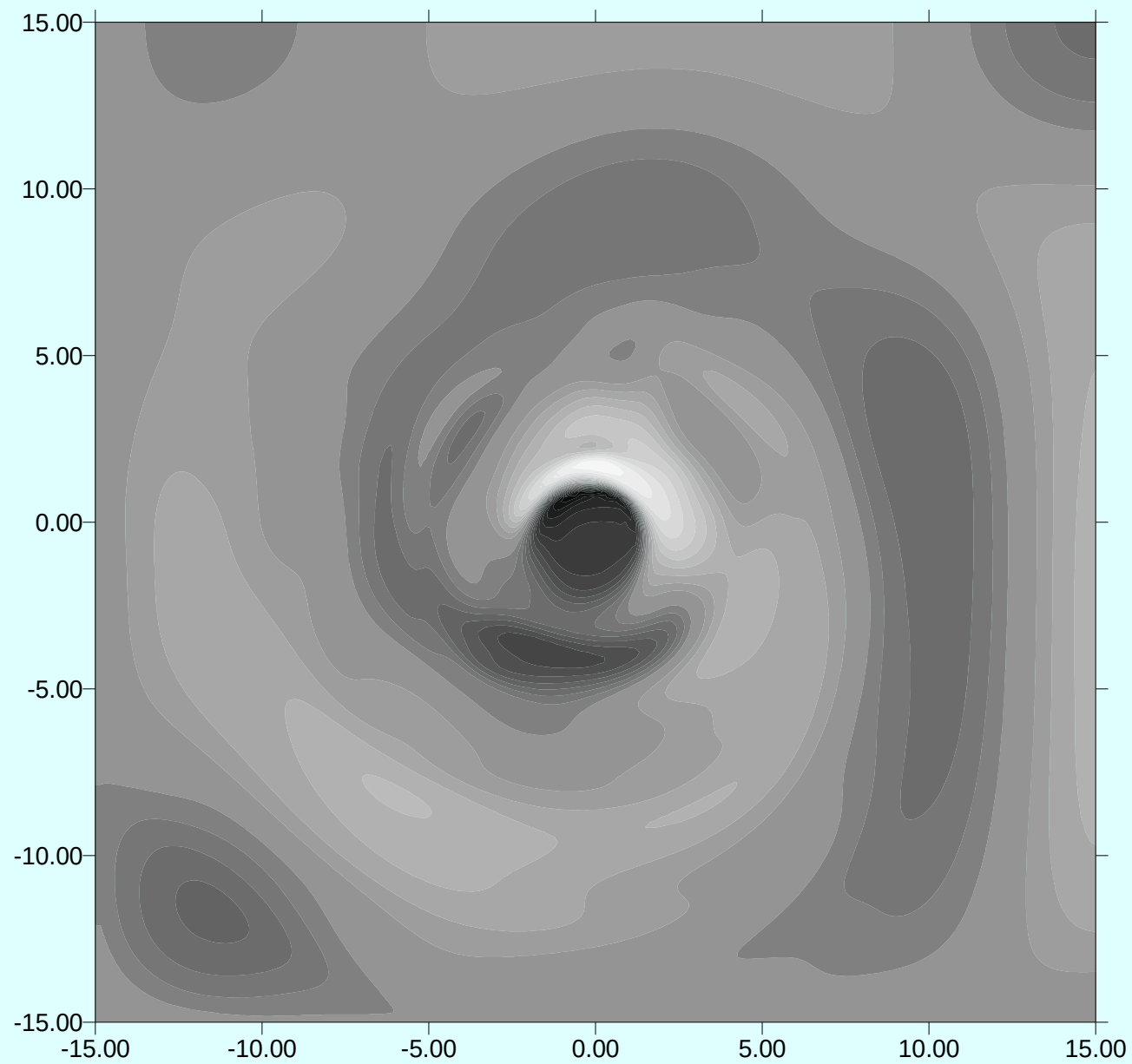


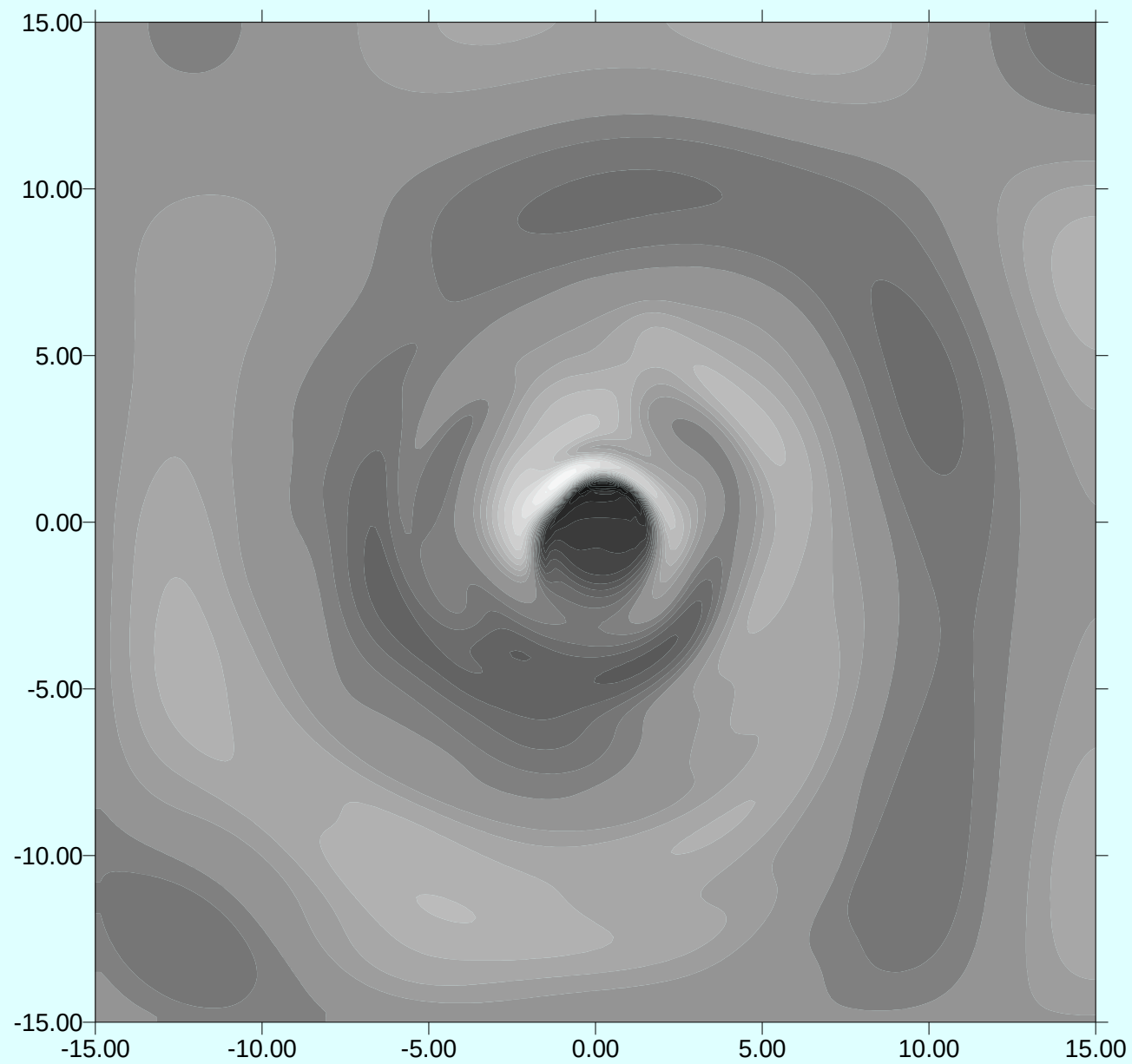






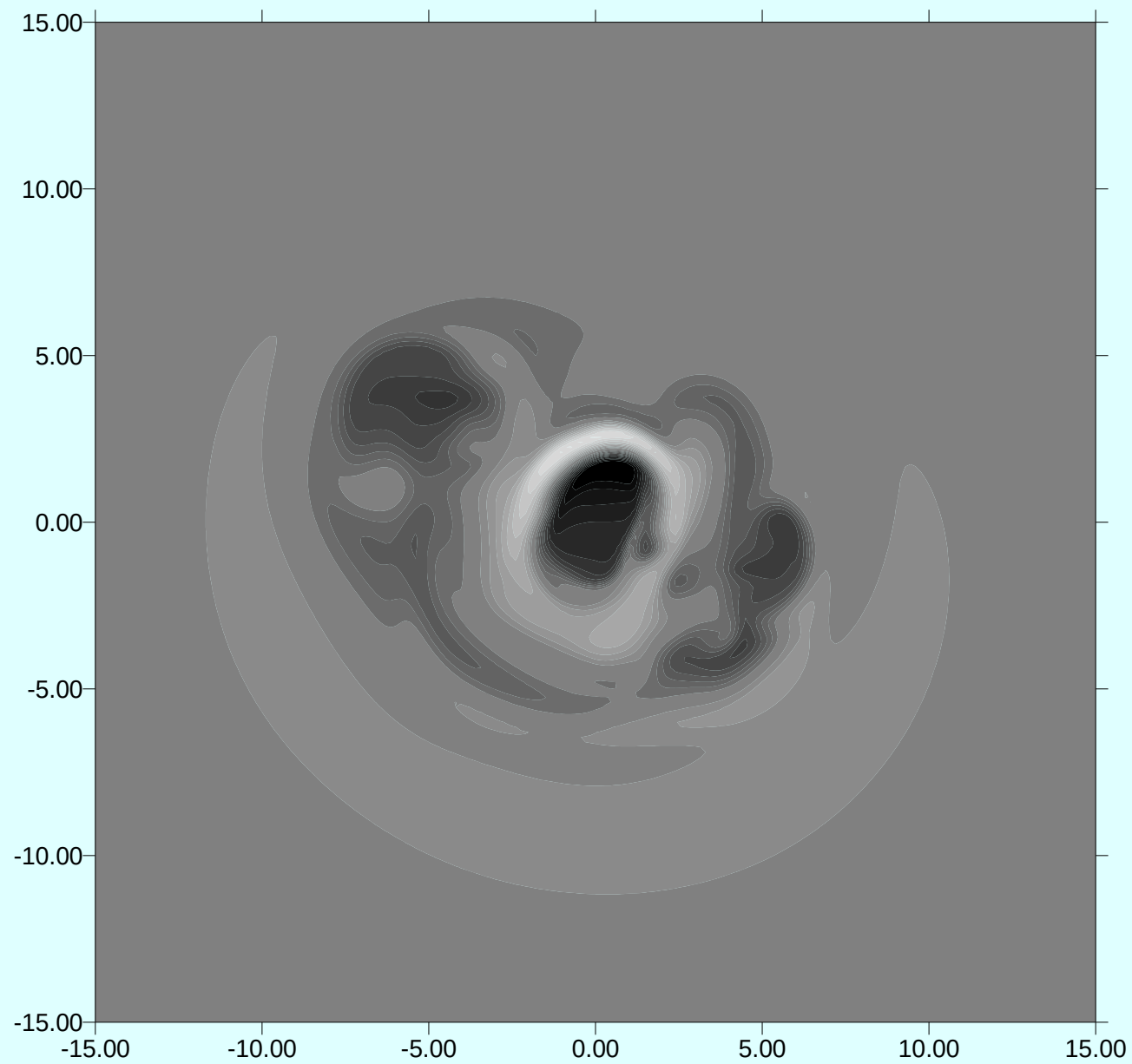


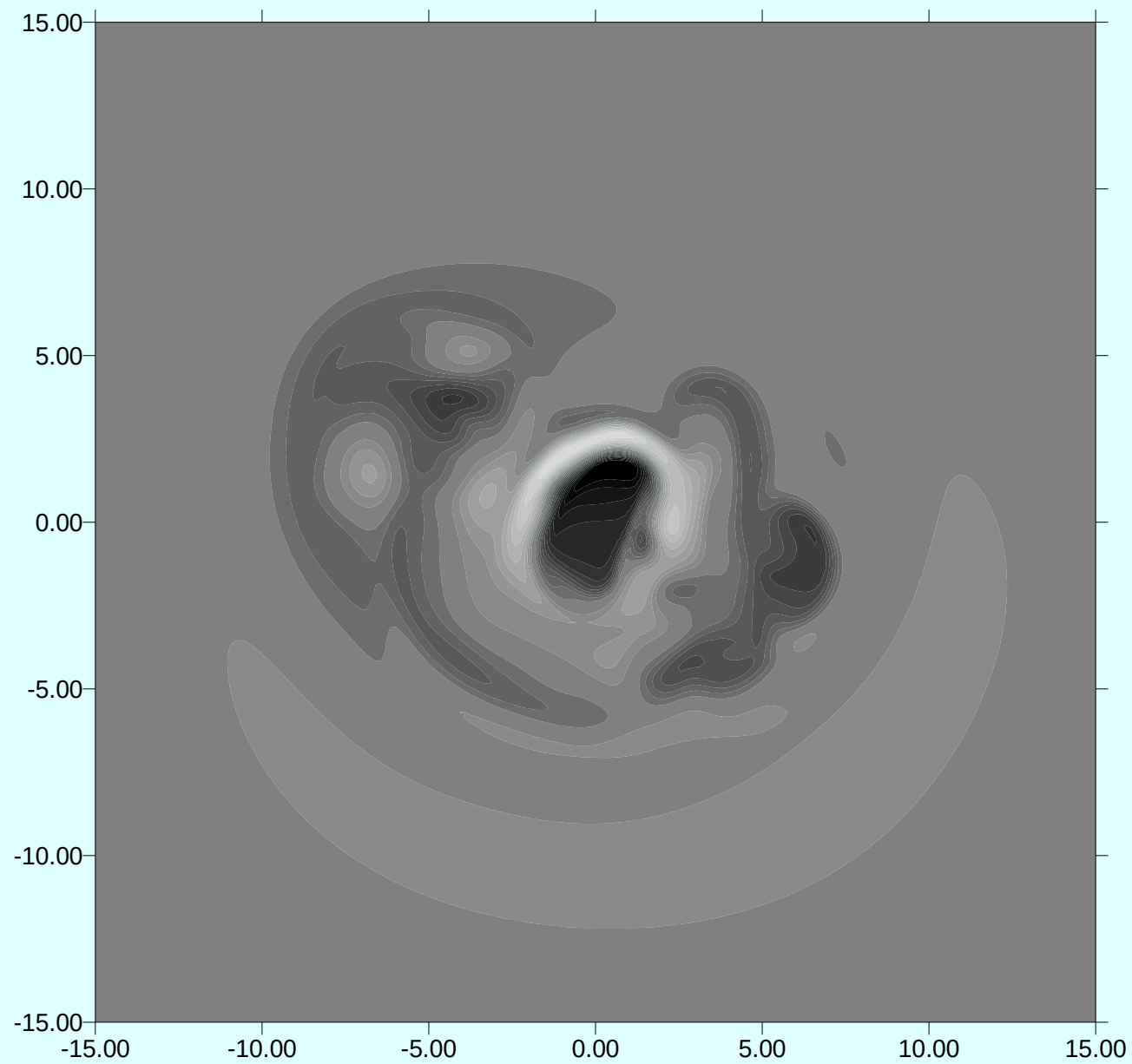


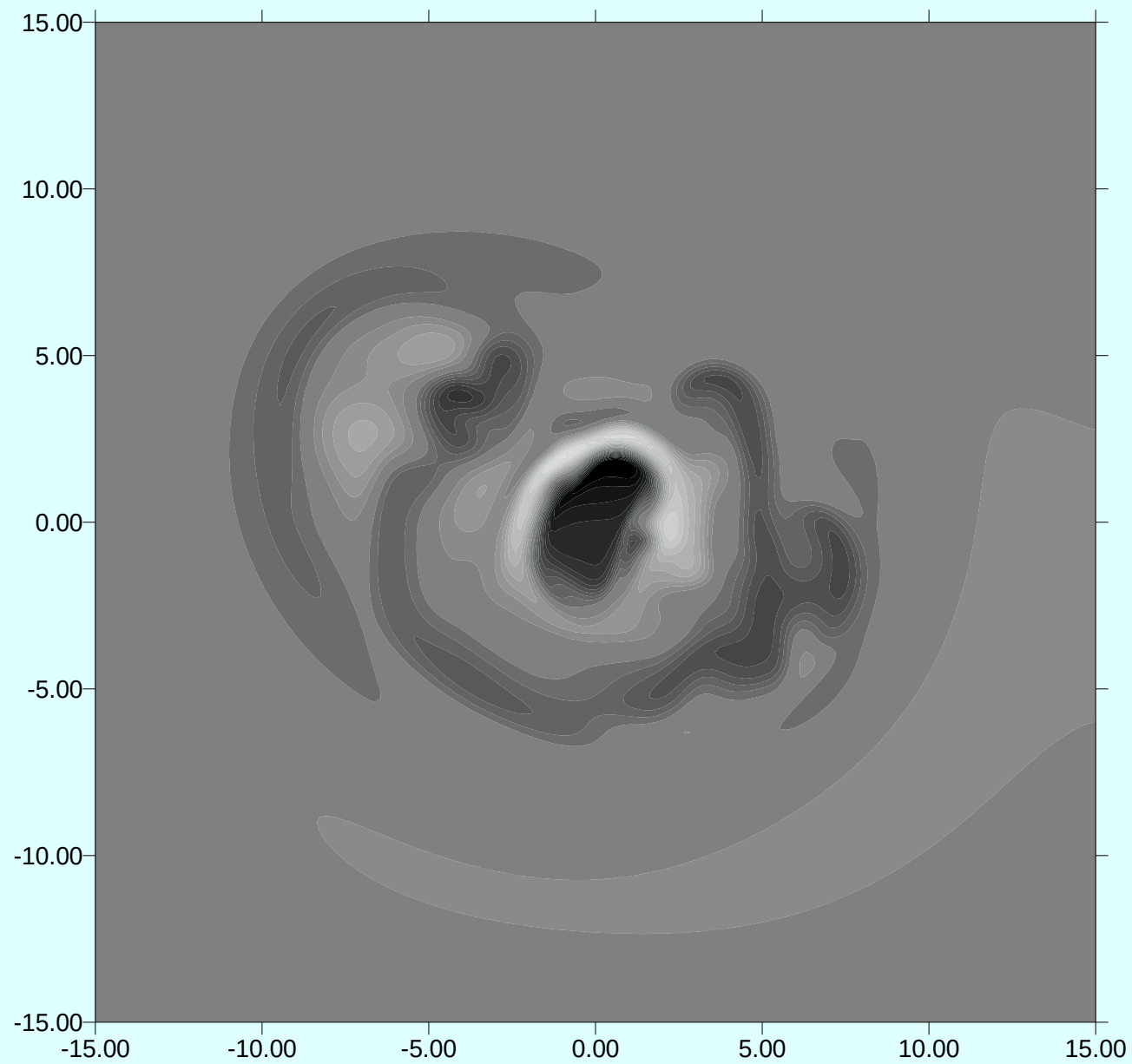


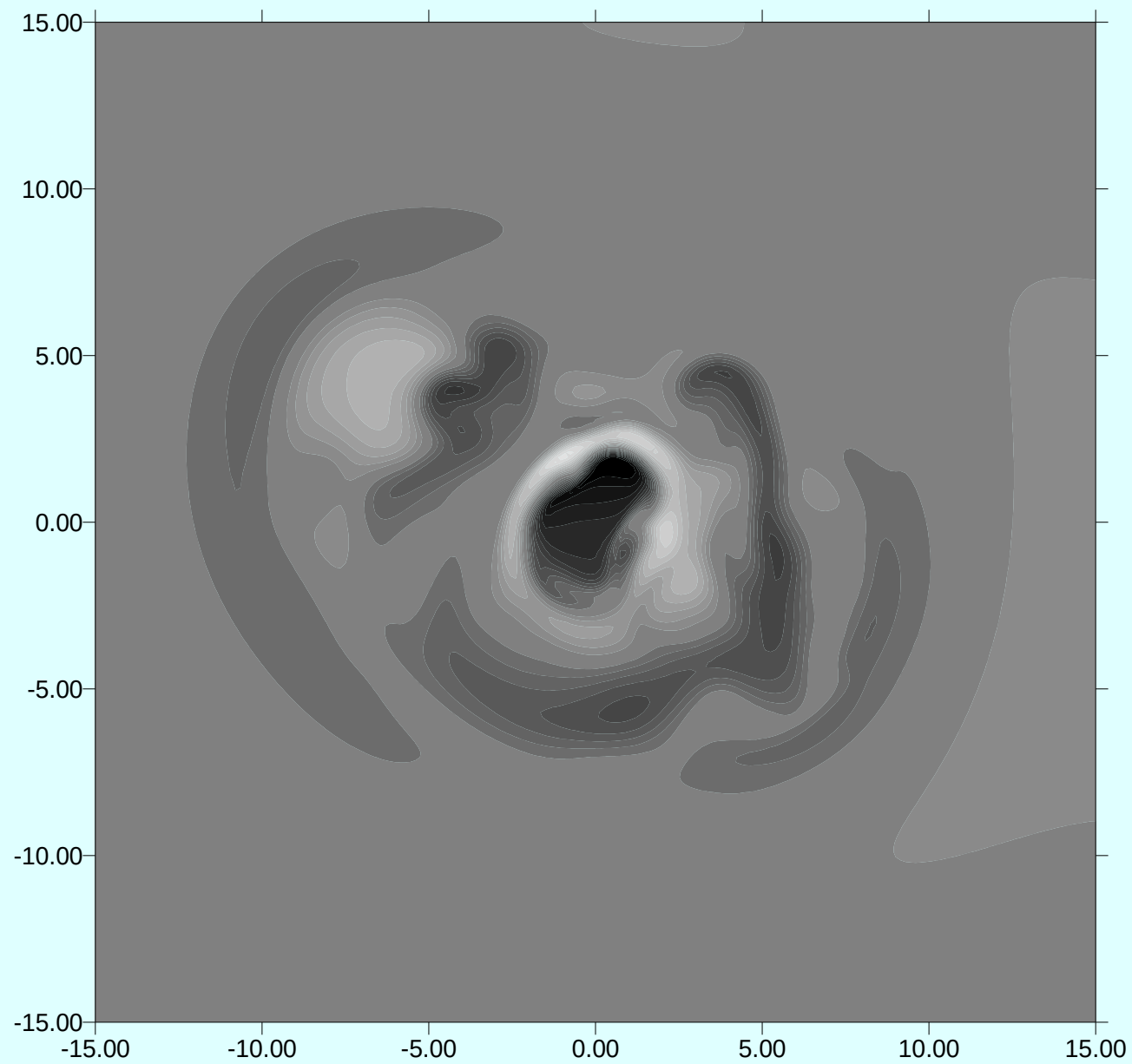
$$\mathbf{Fr = 7.0}$$

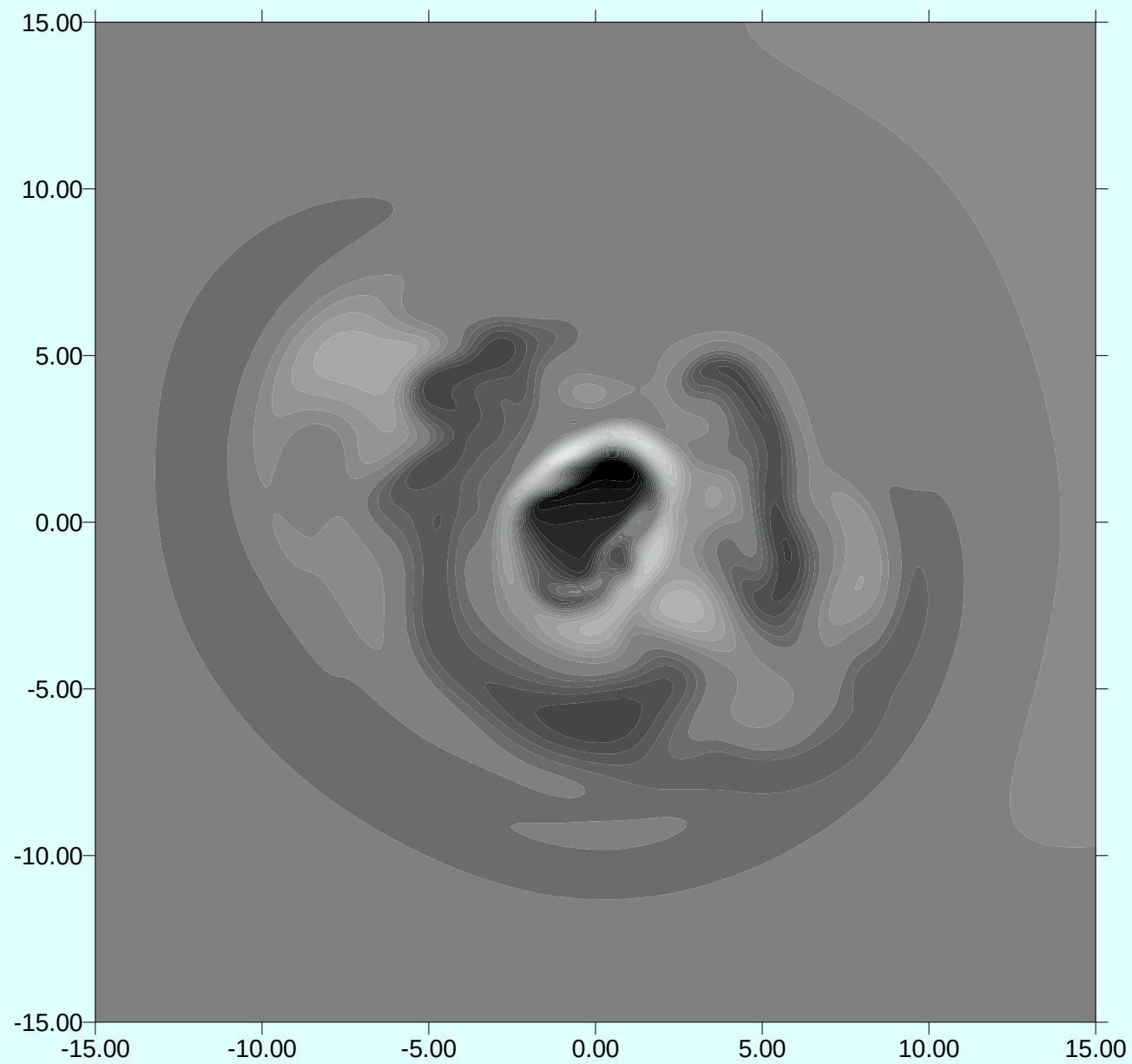
$$a_f = 0.001$$

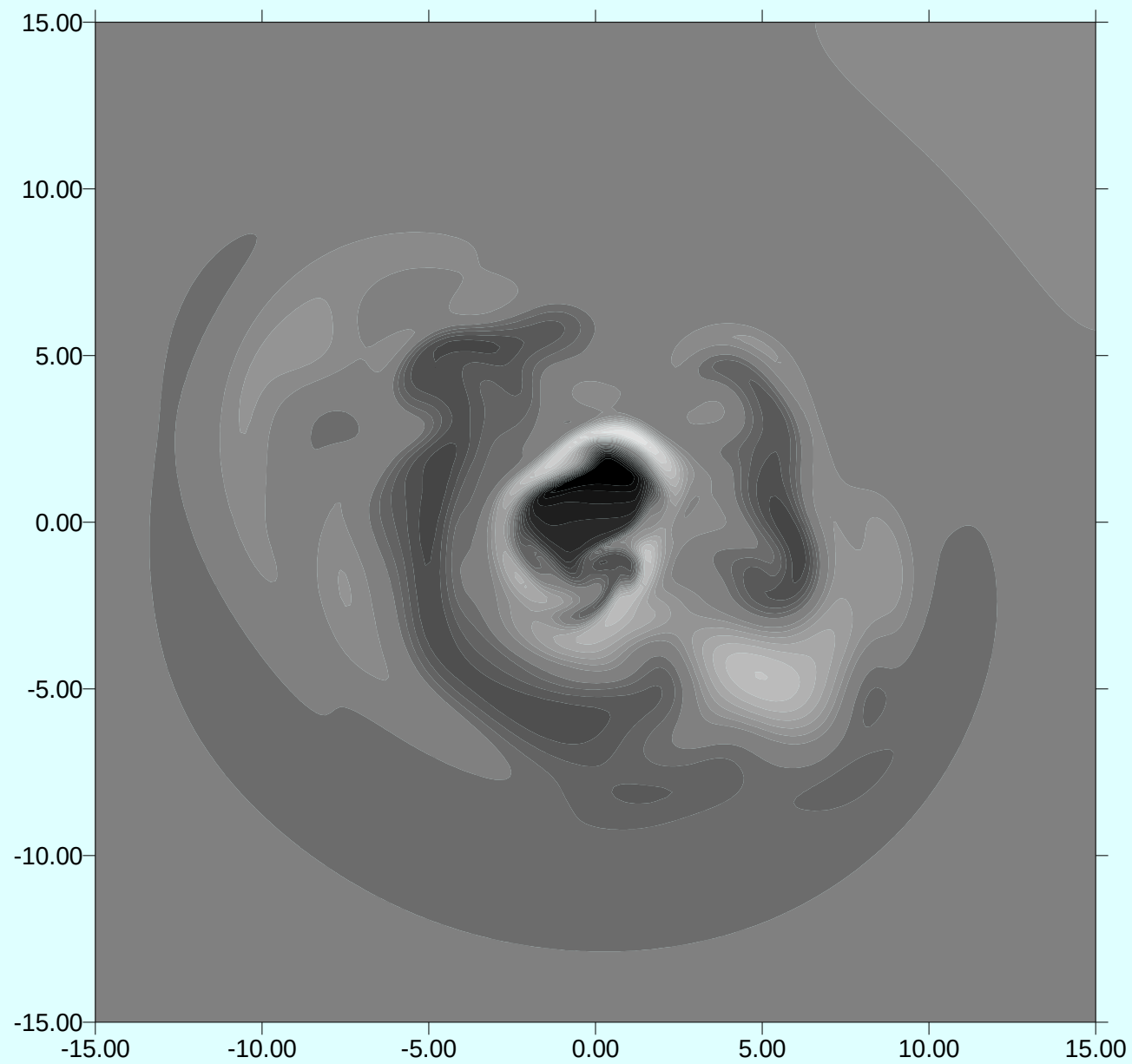


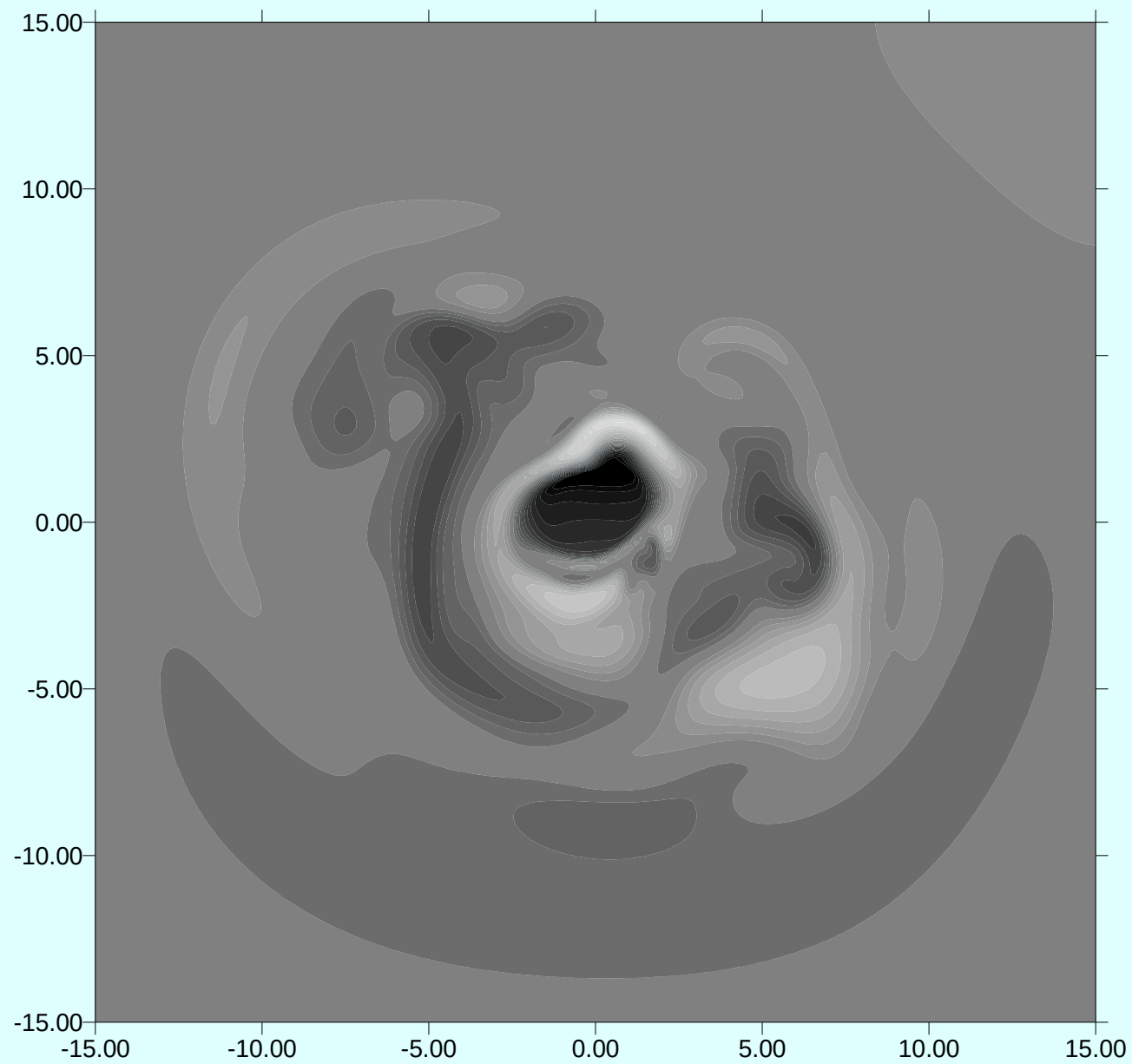


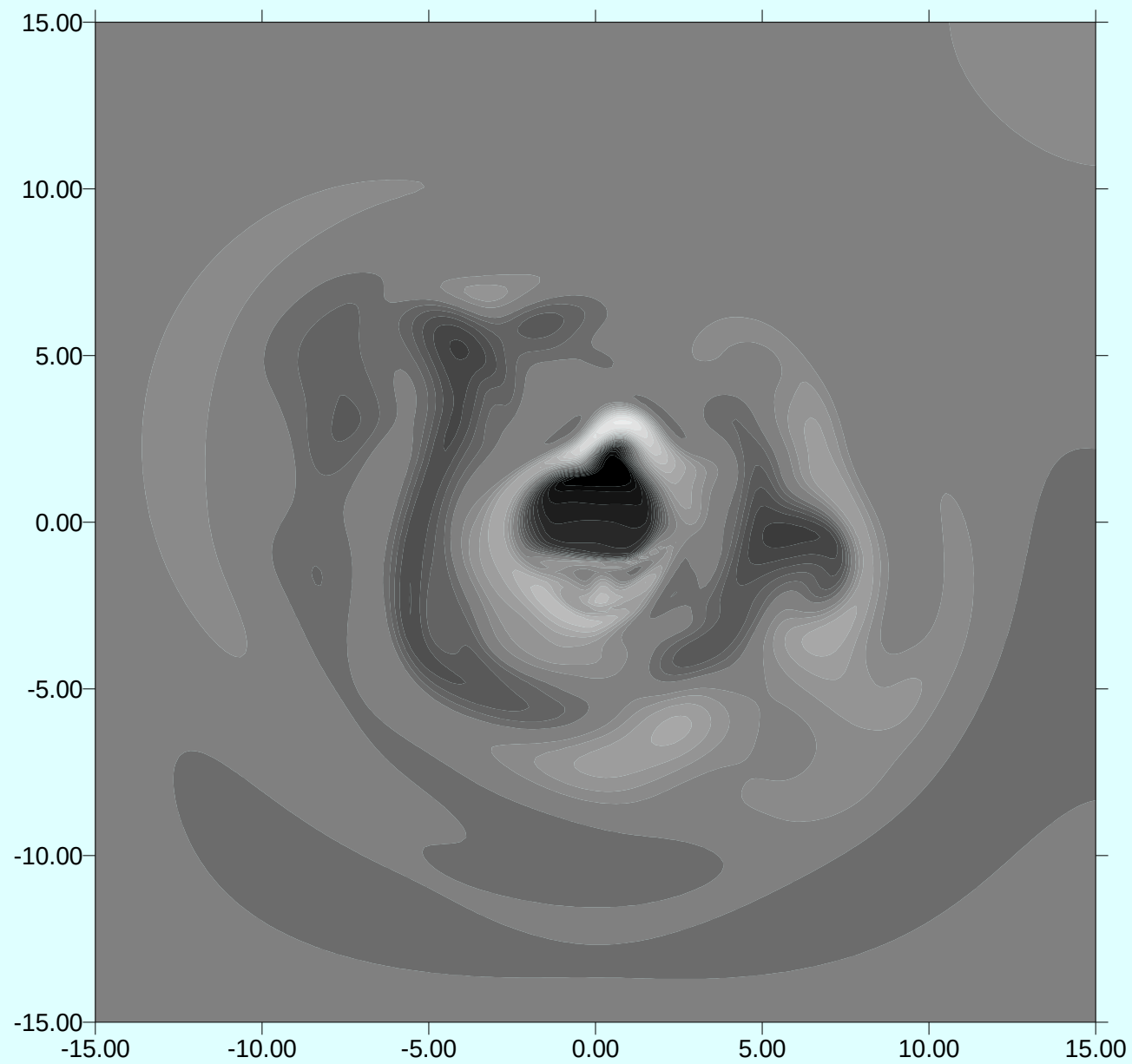


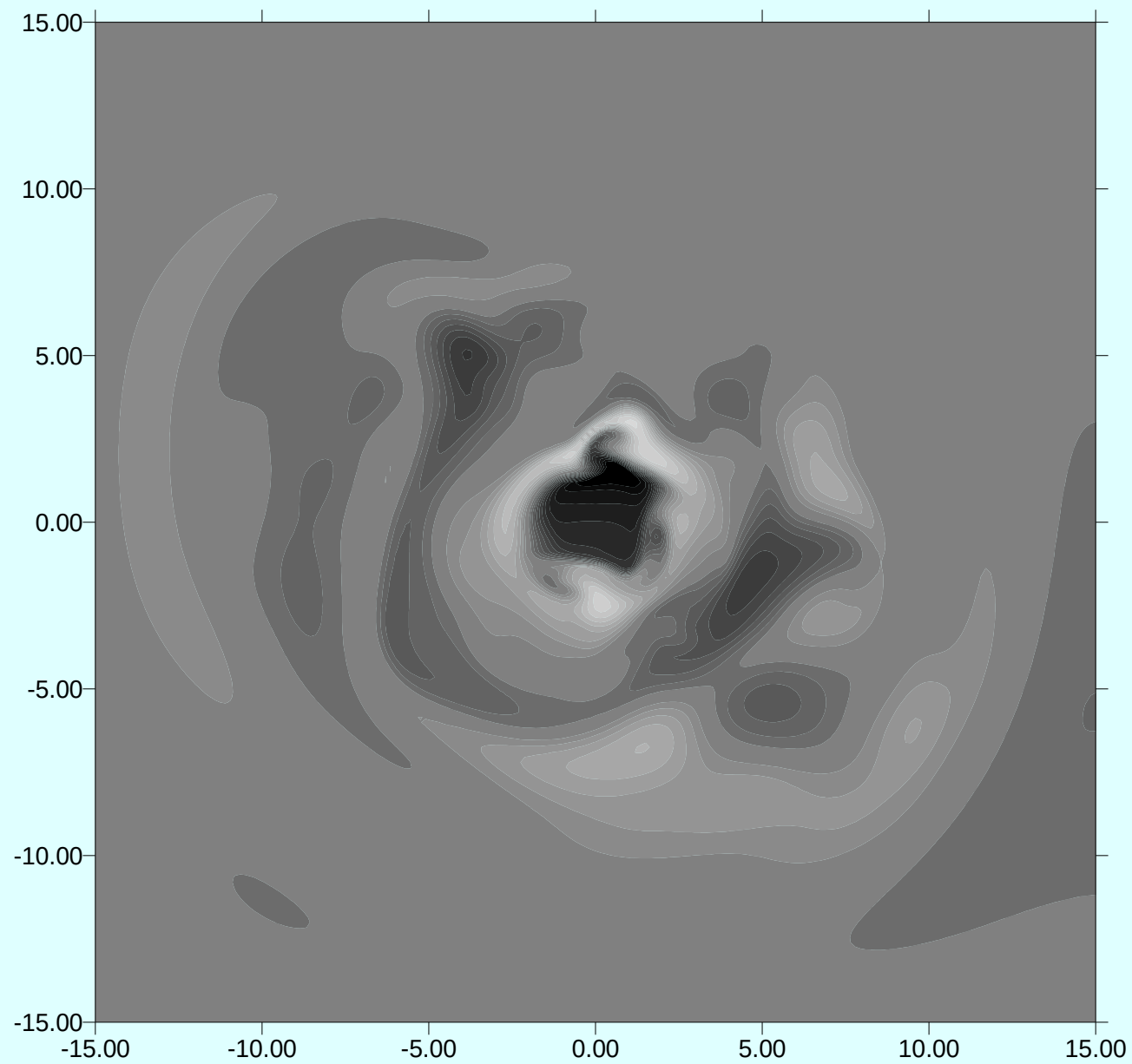


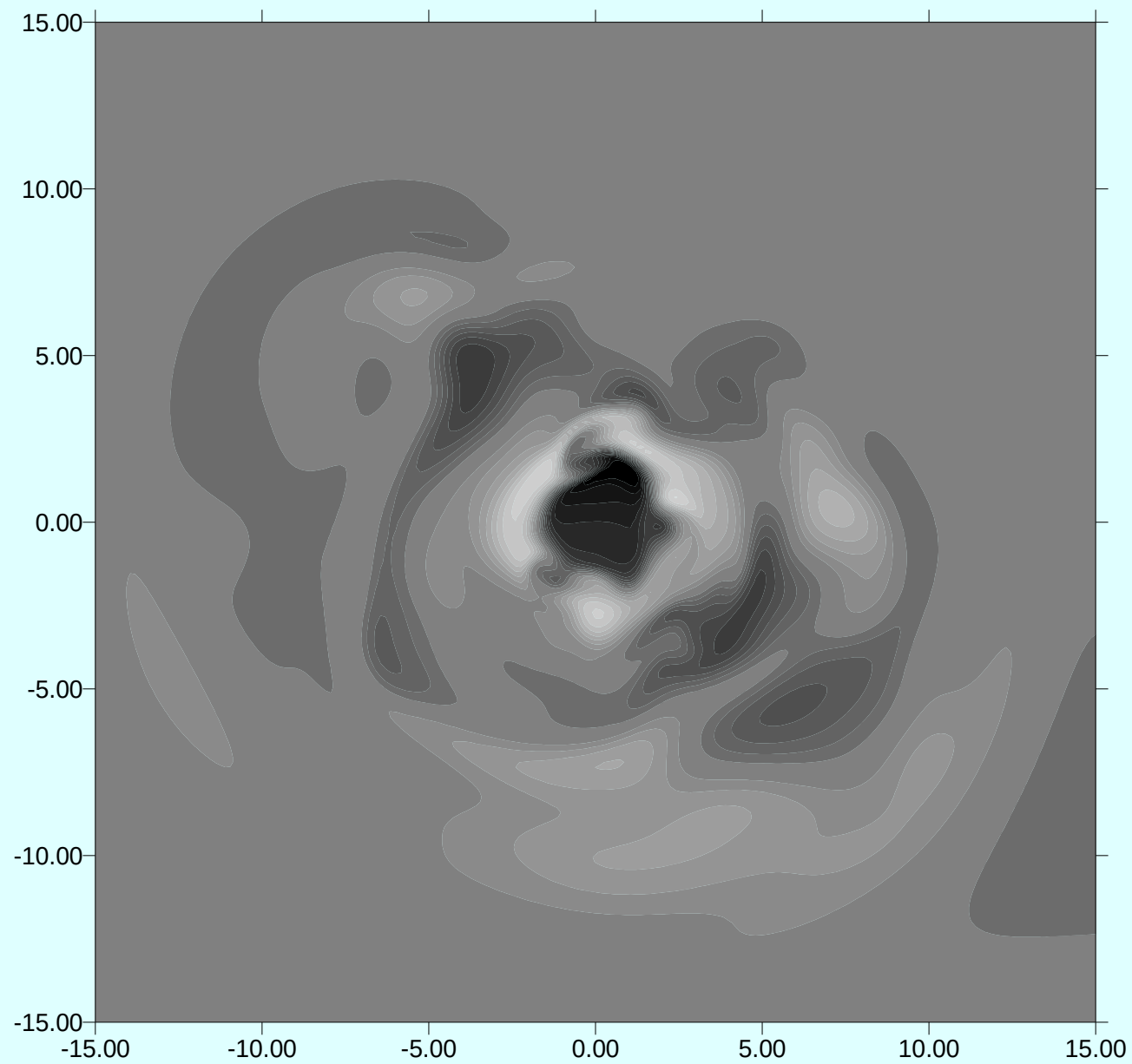


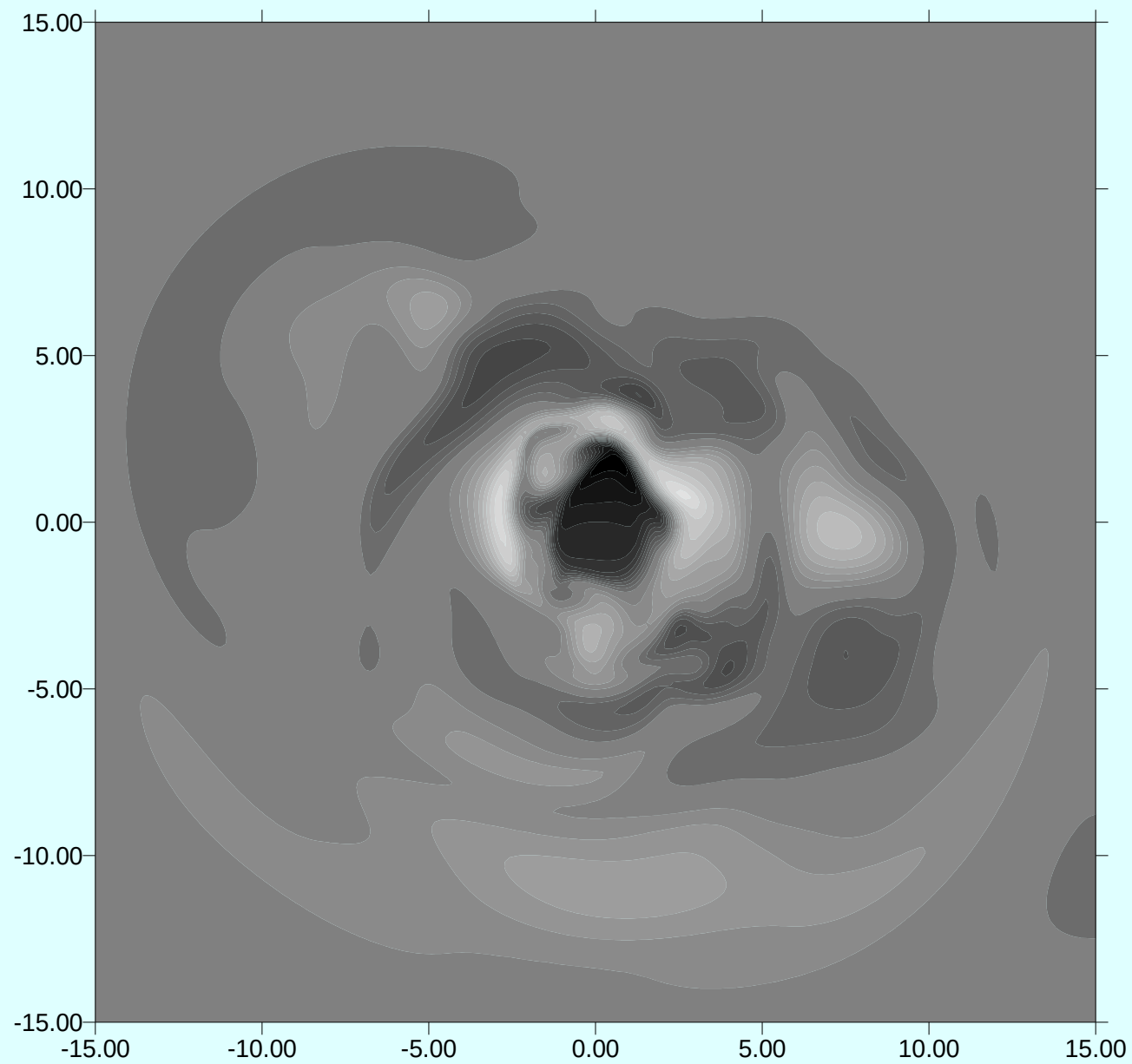


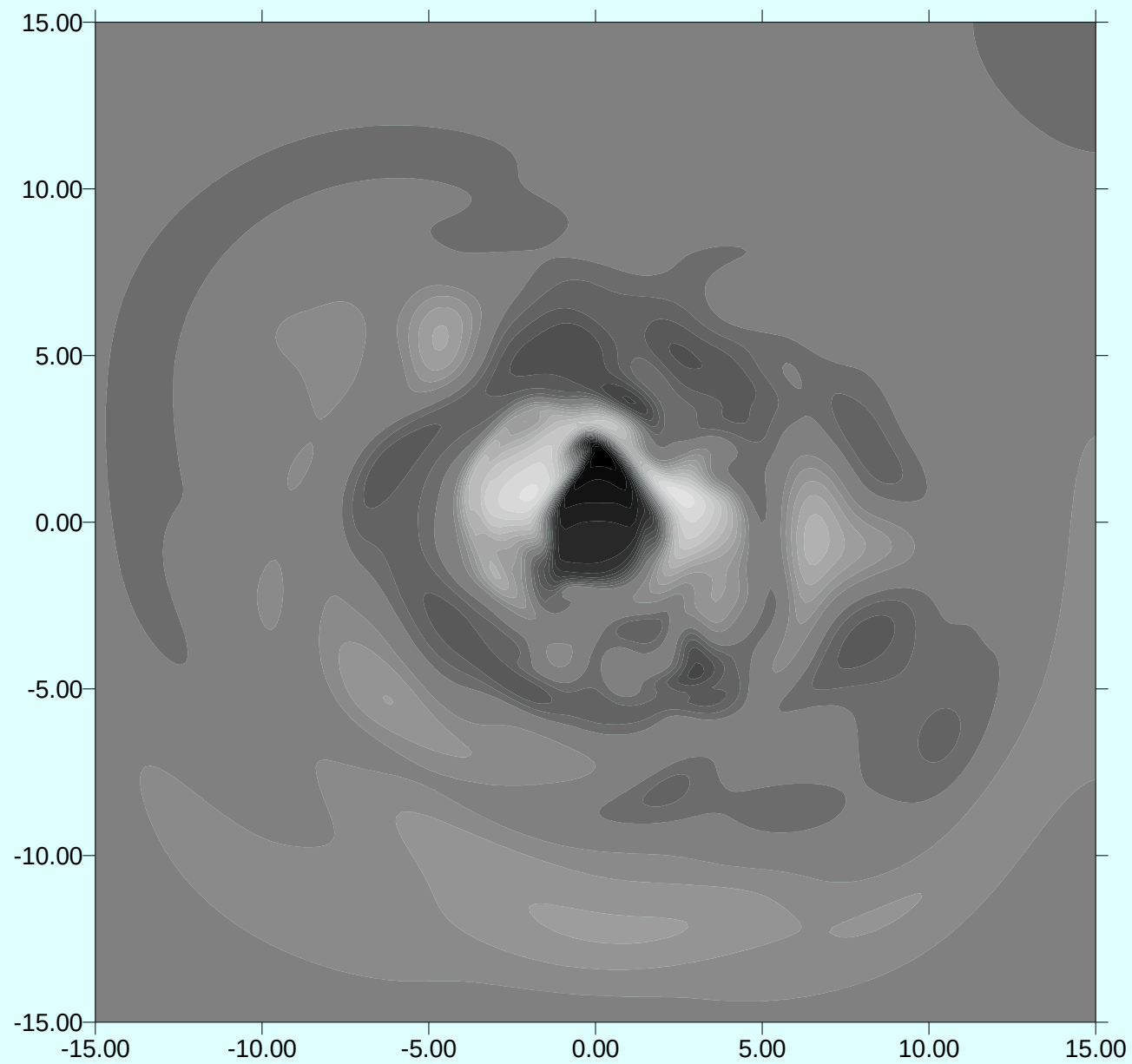


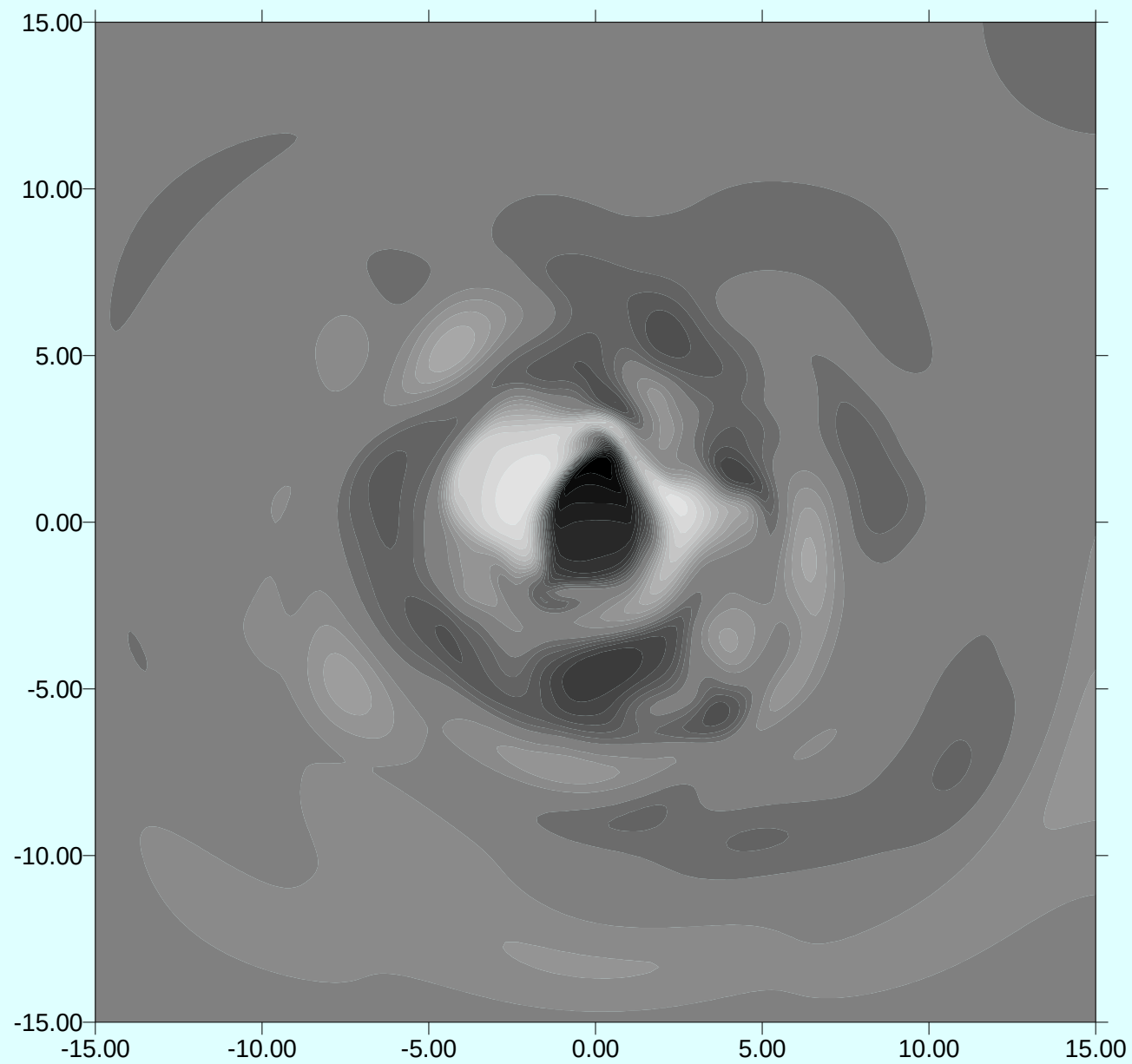


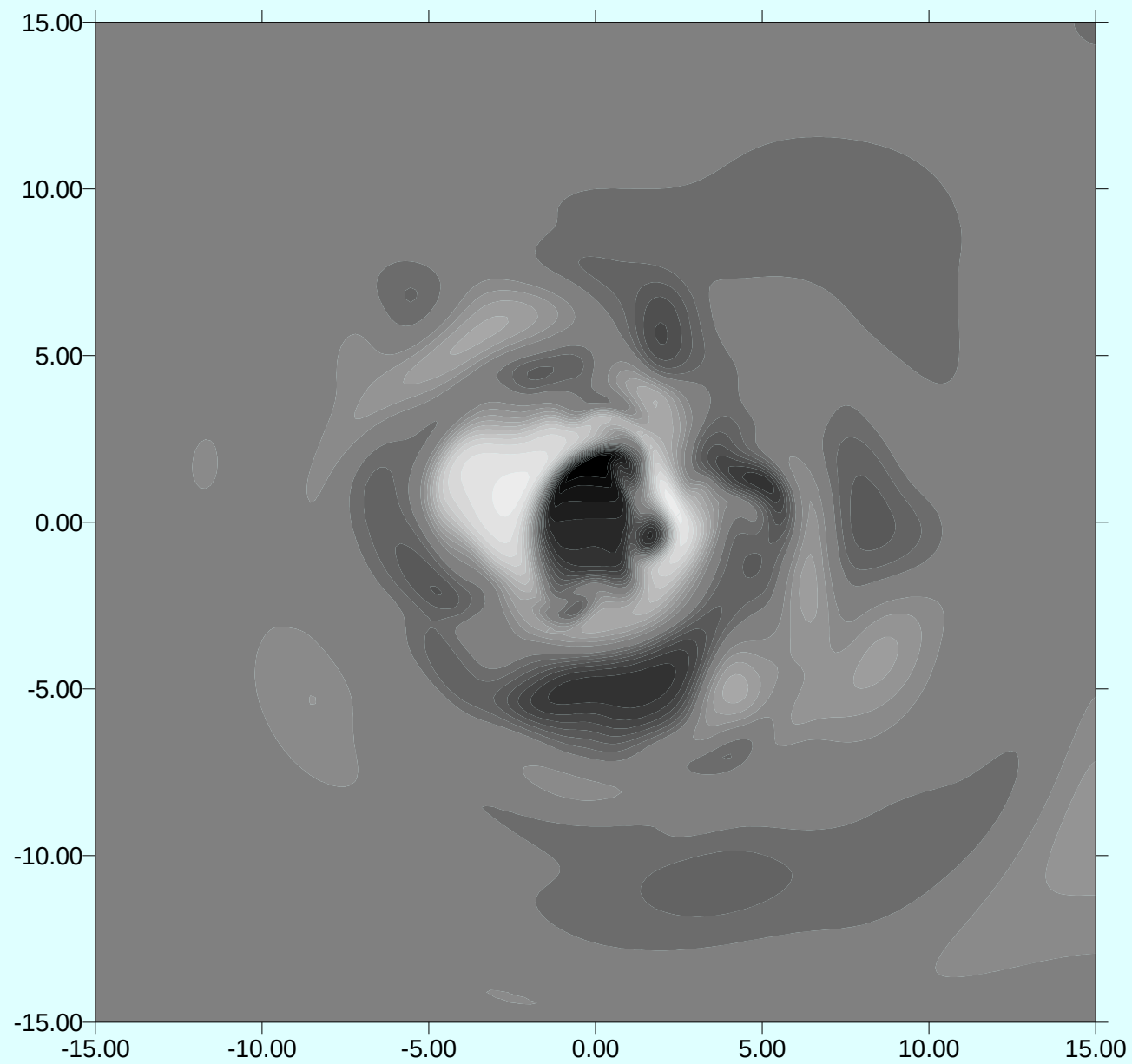


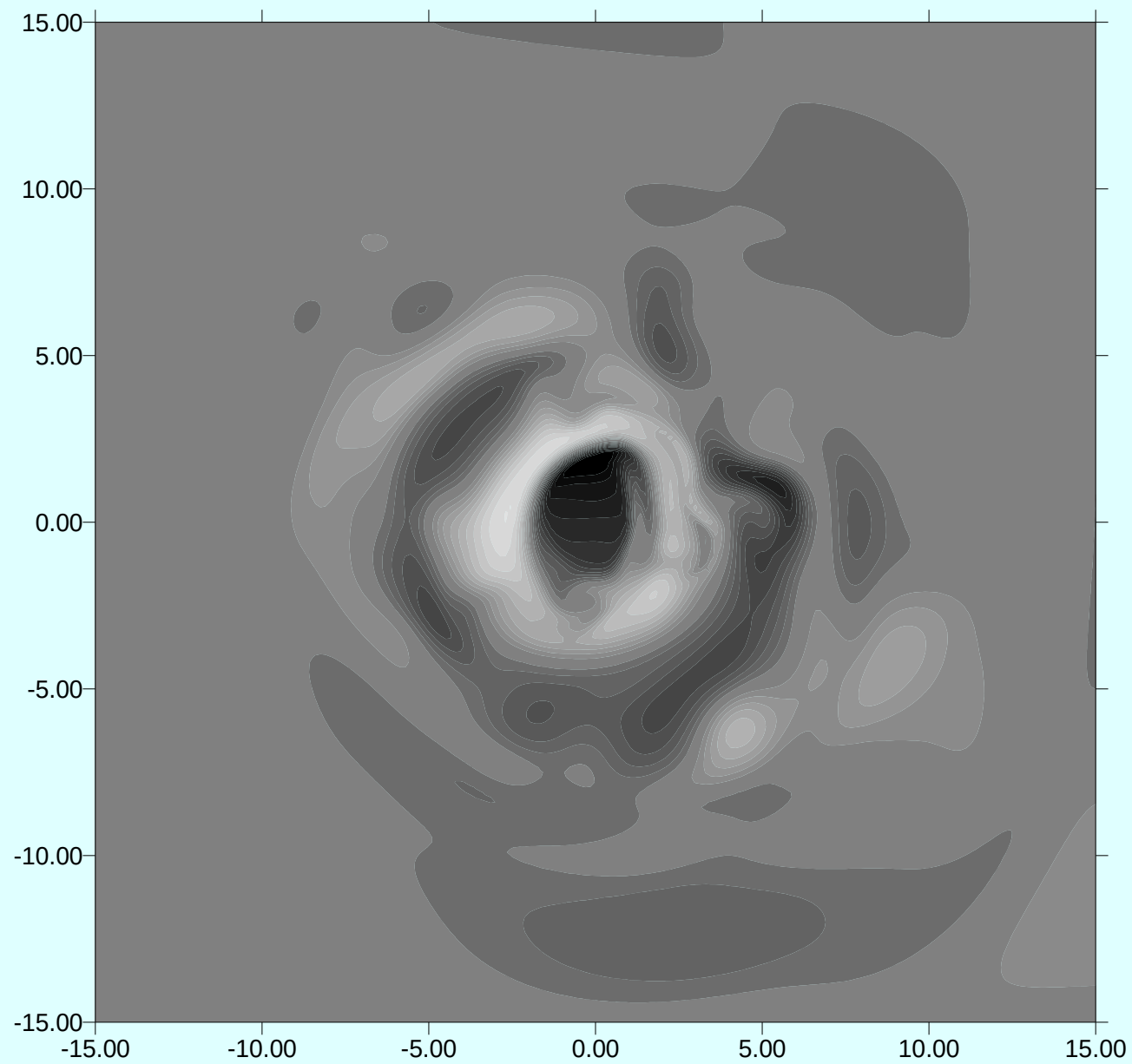


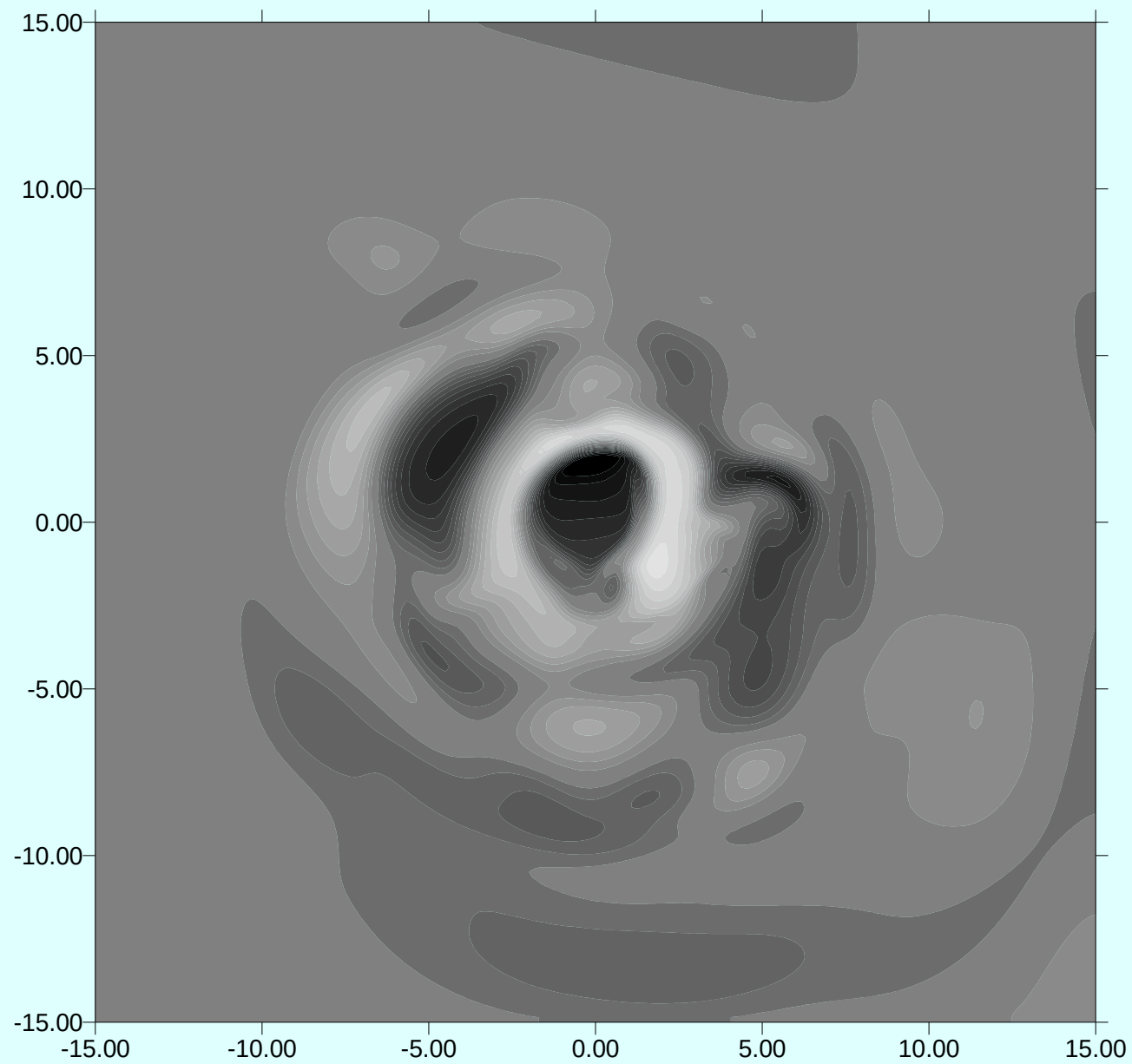


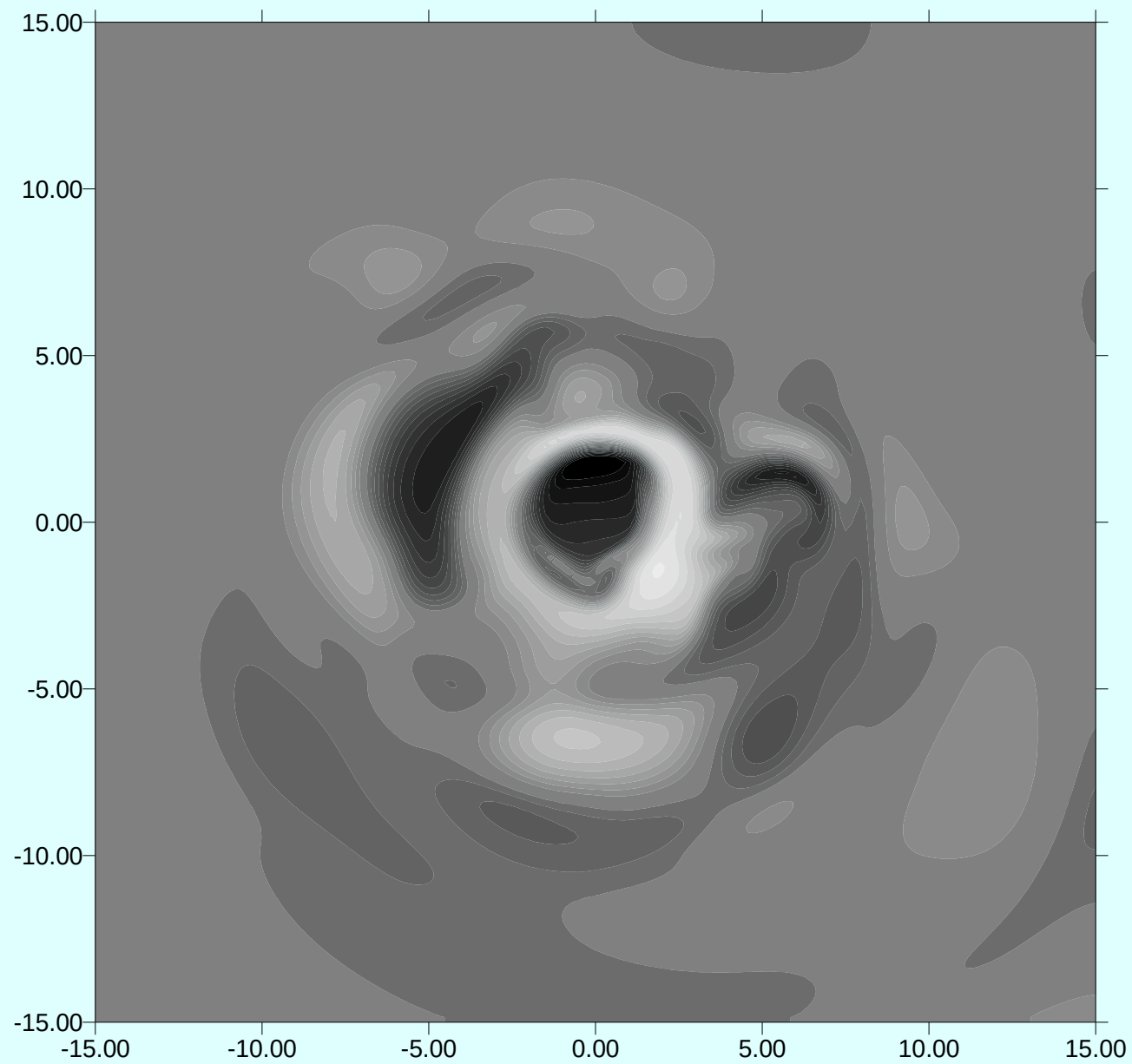


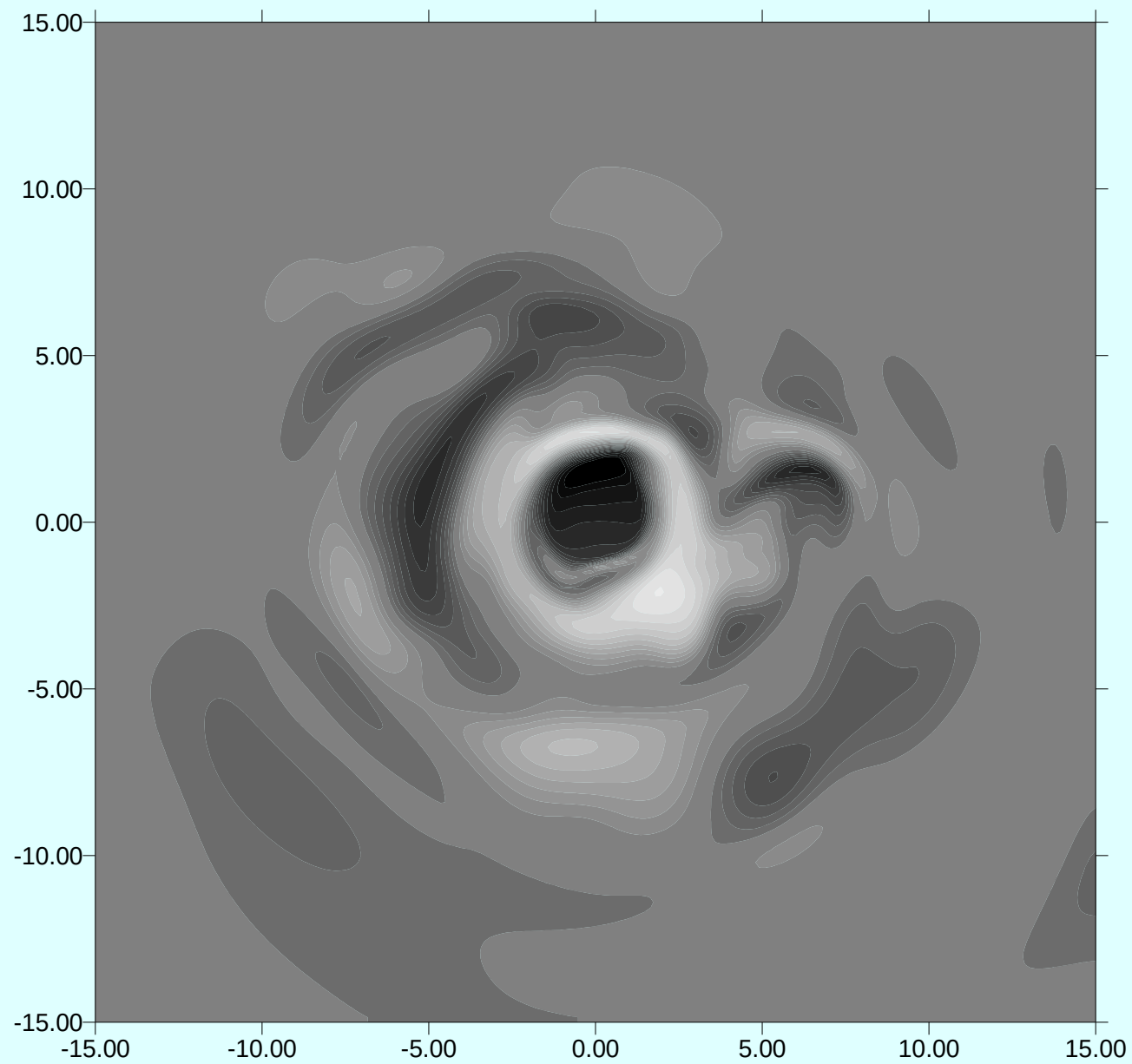


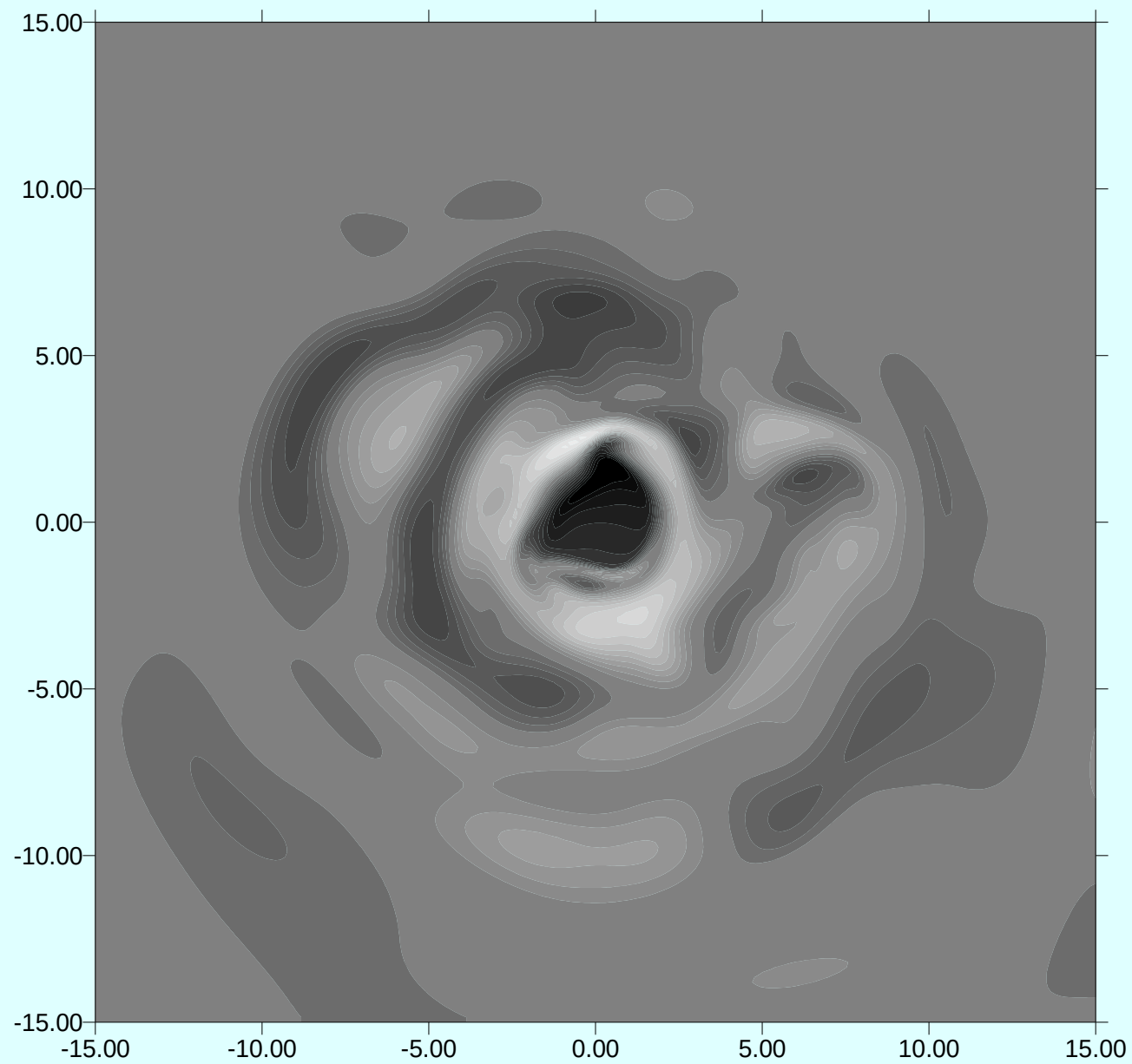


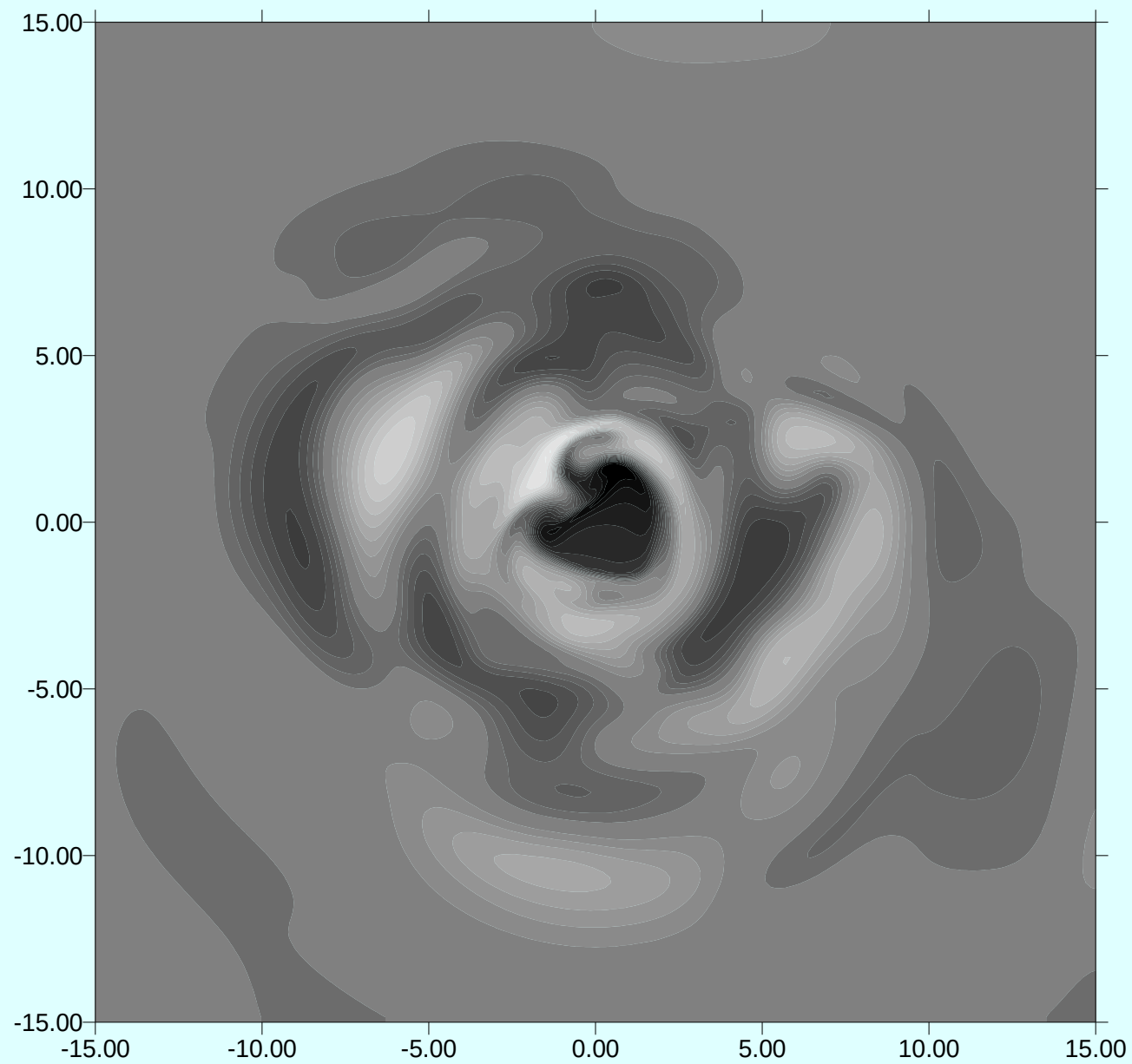


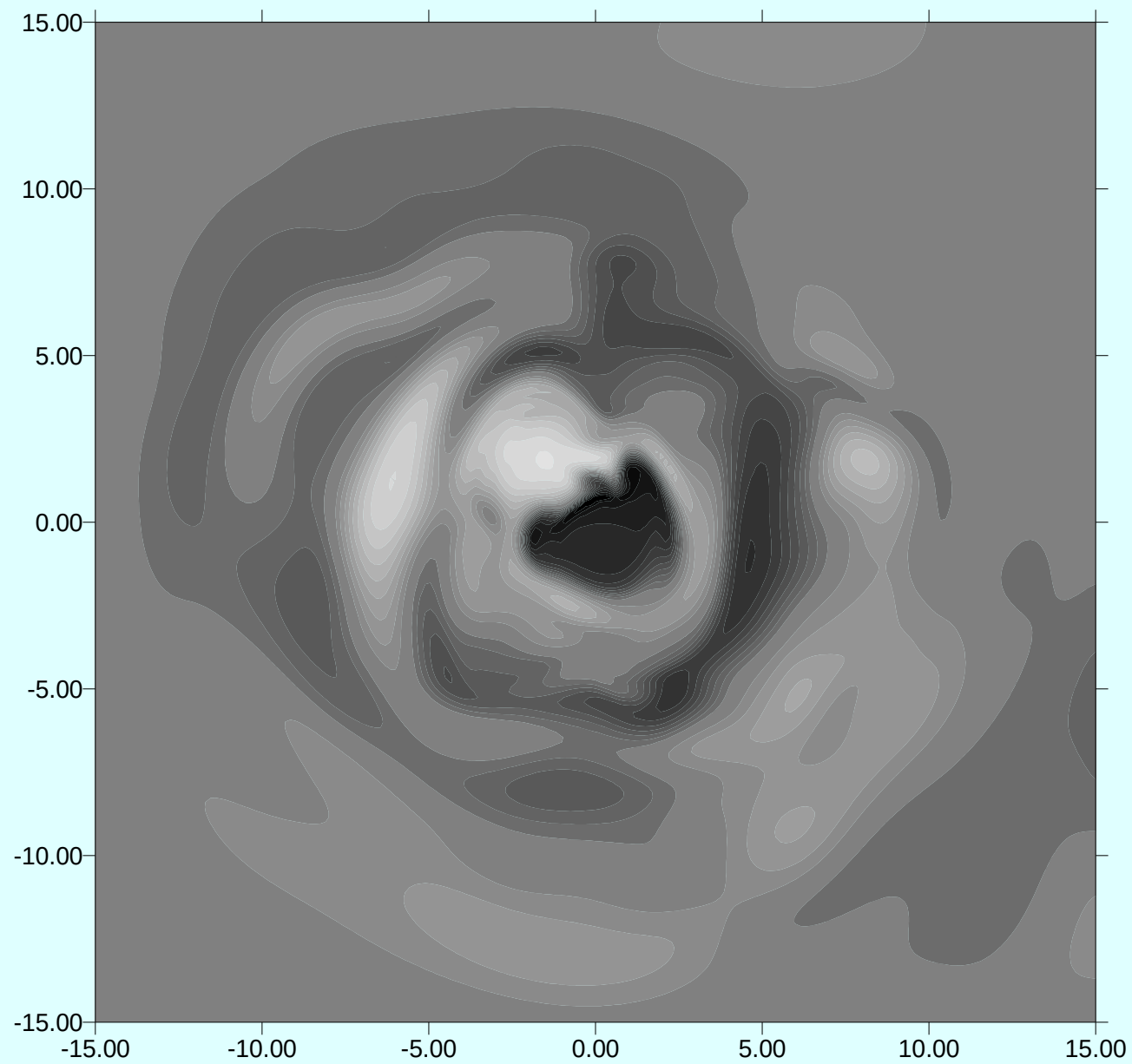


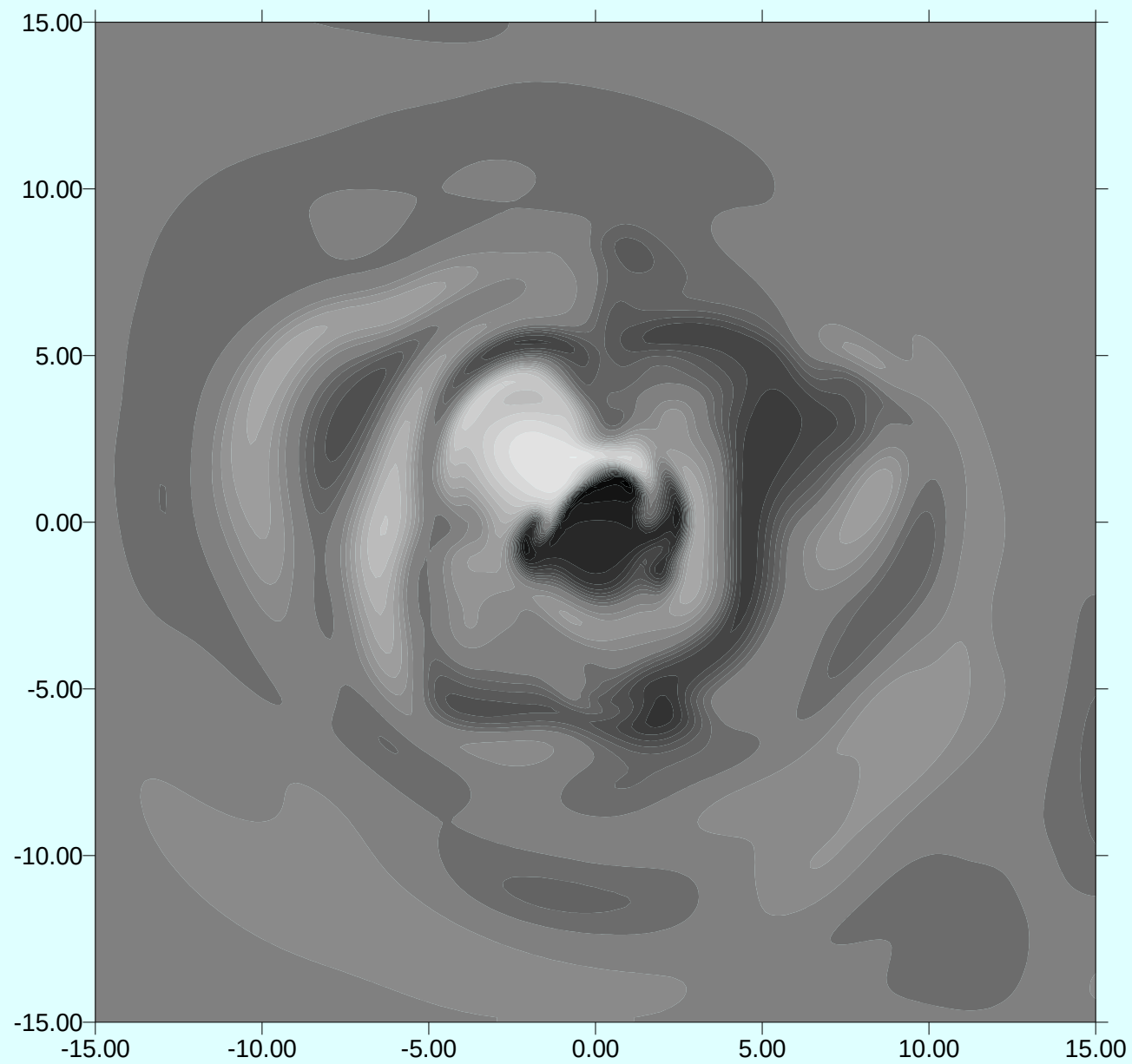


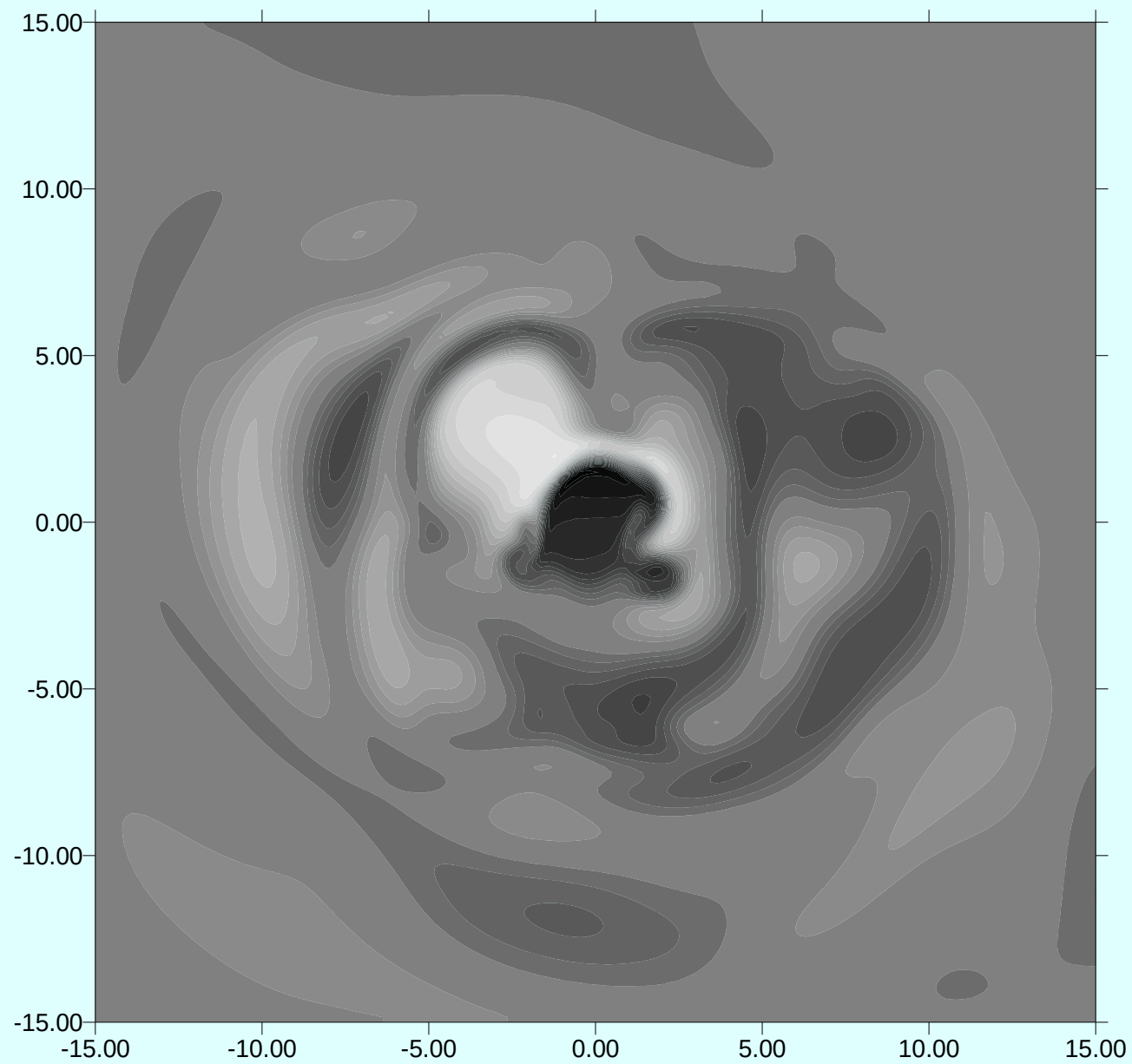


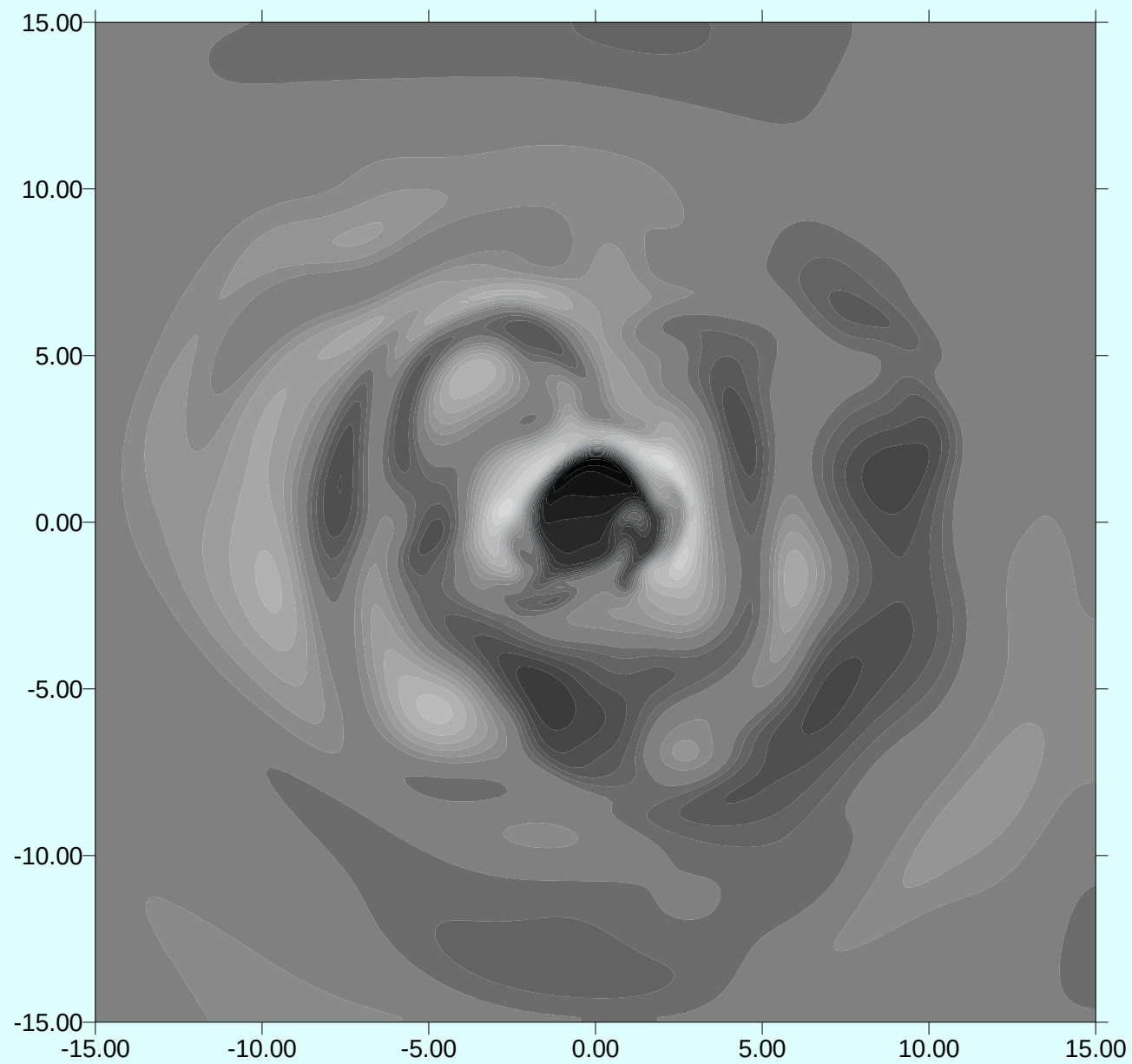


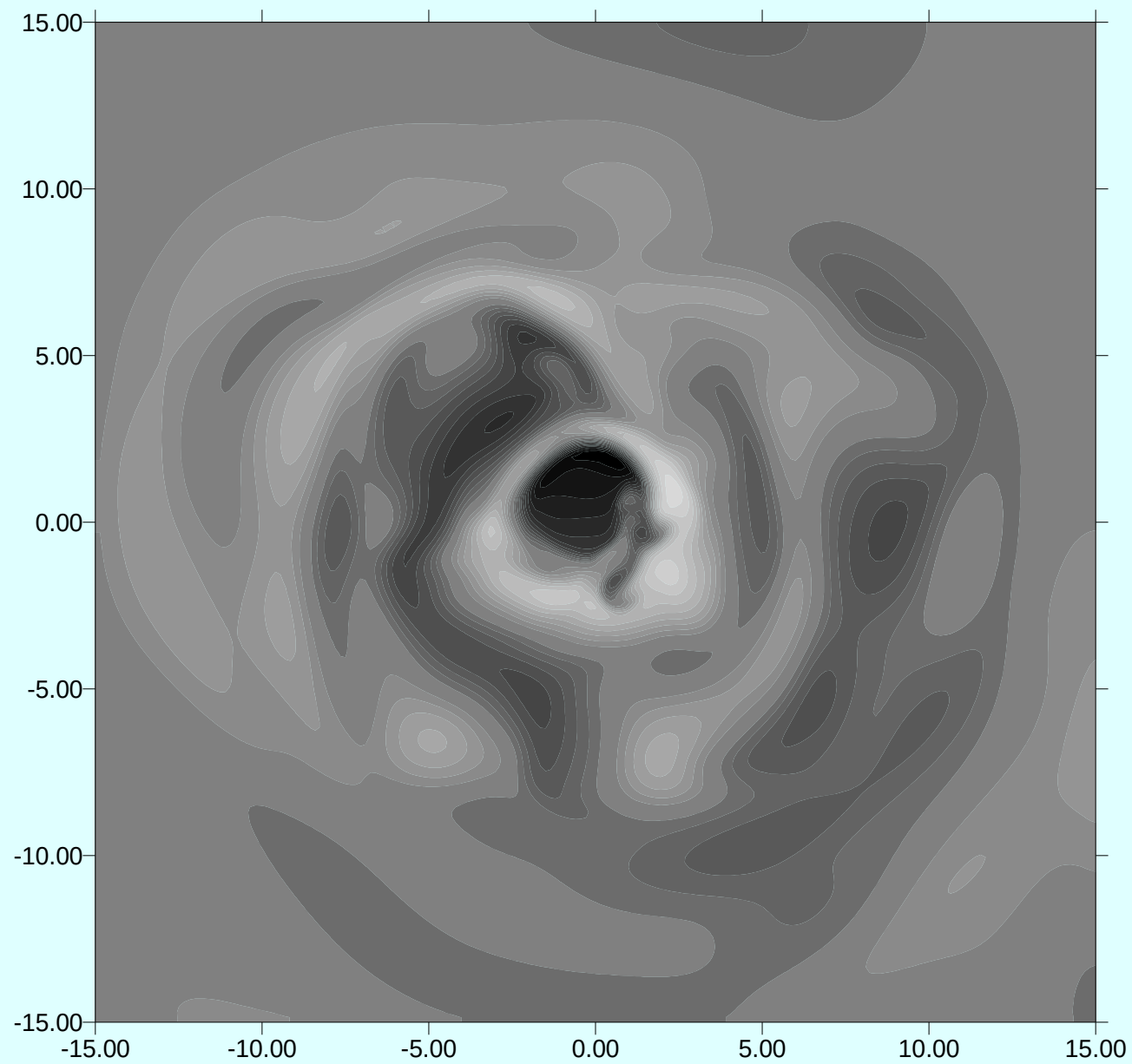


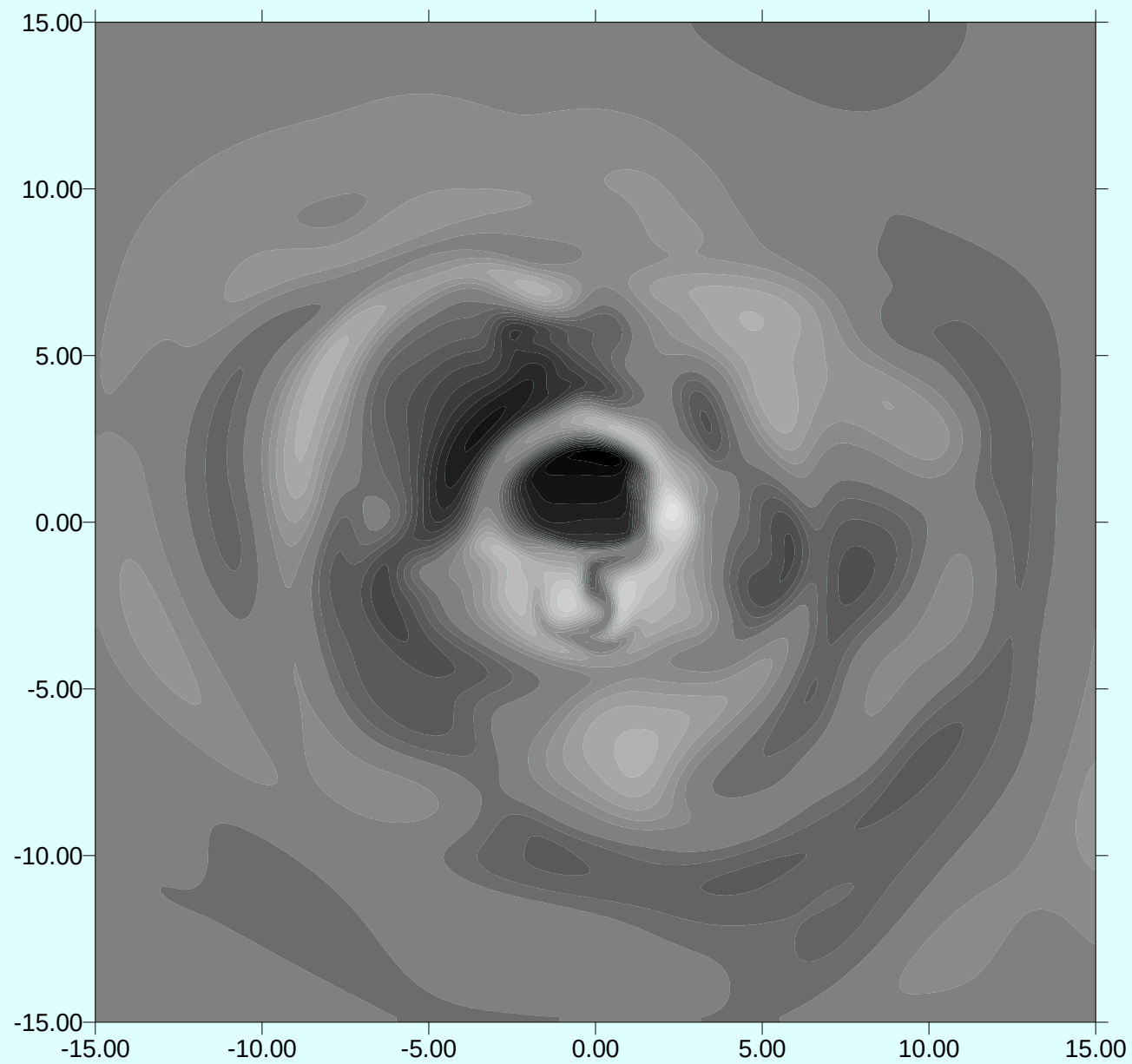


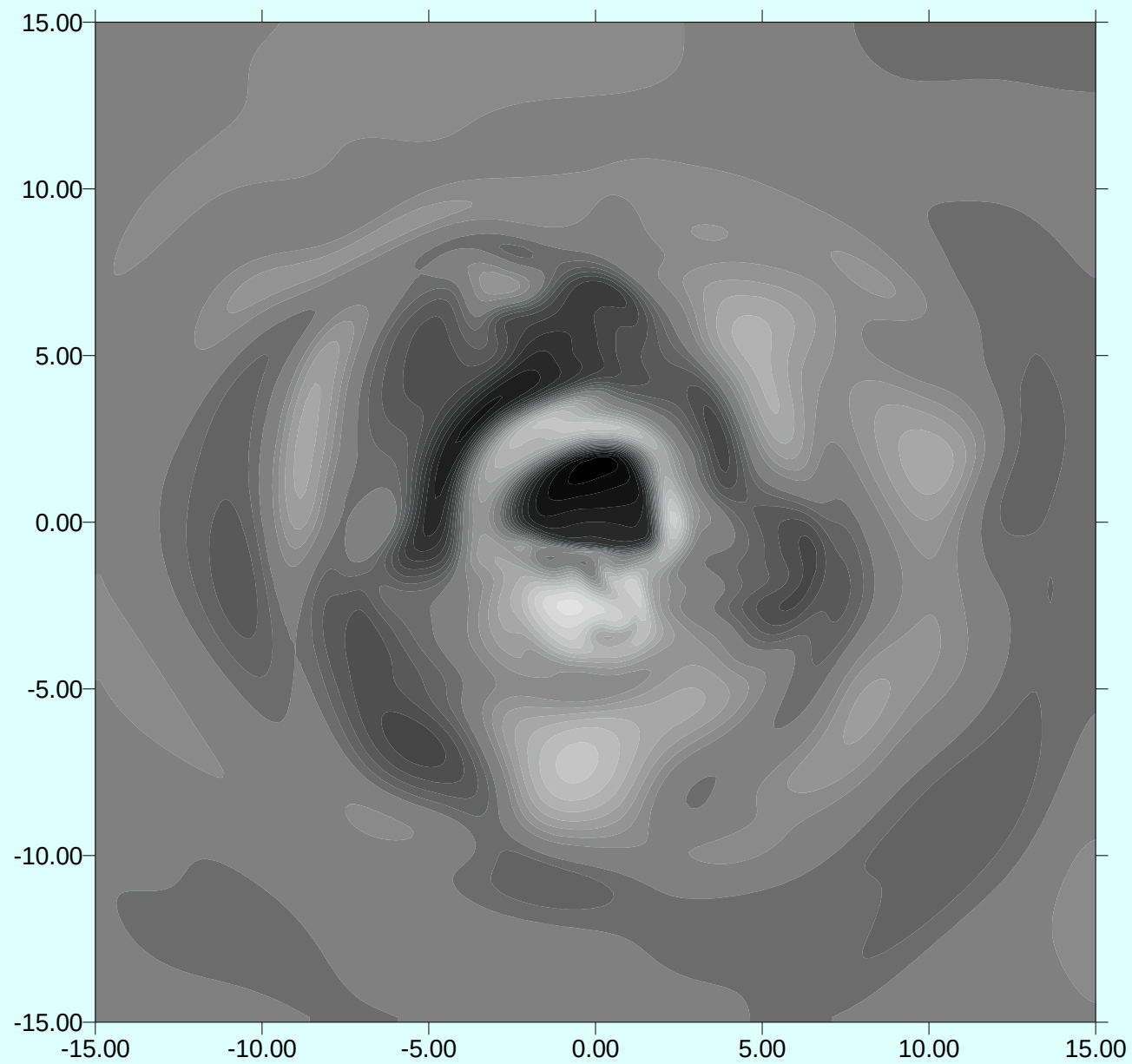


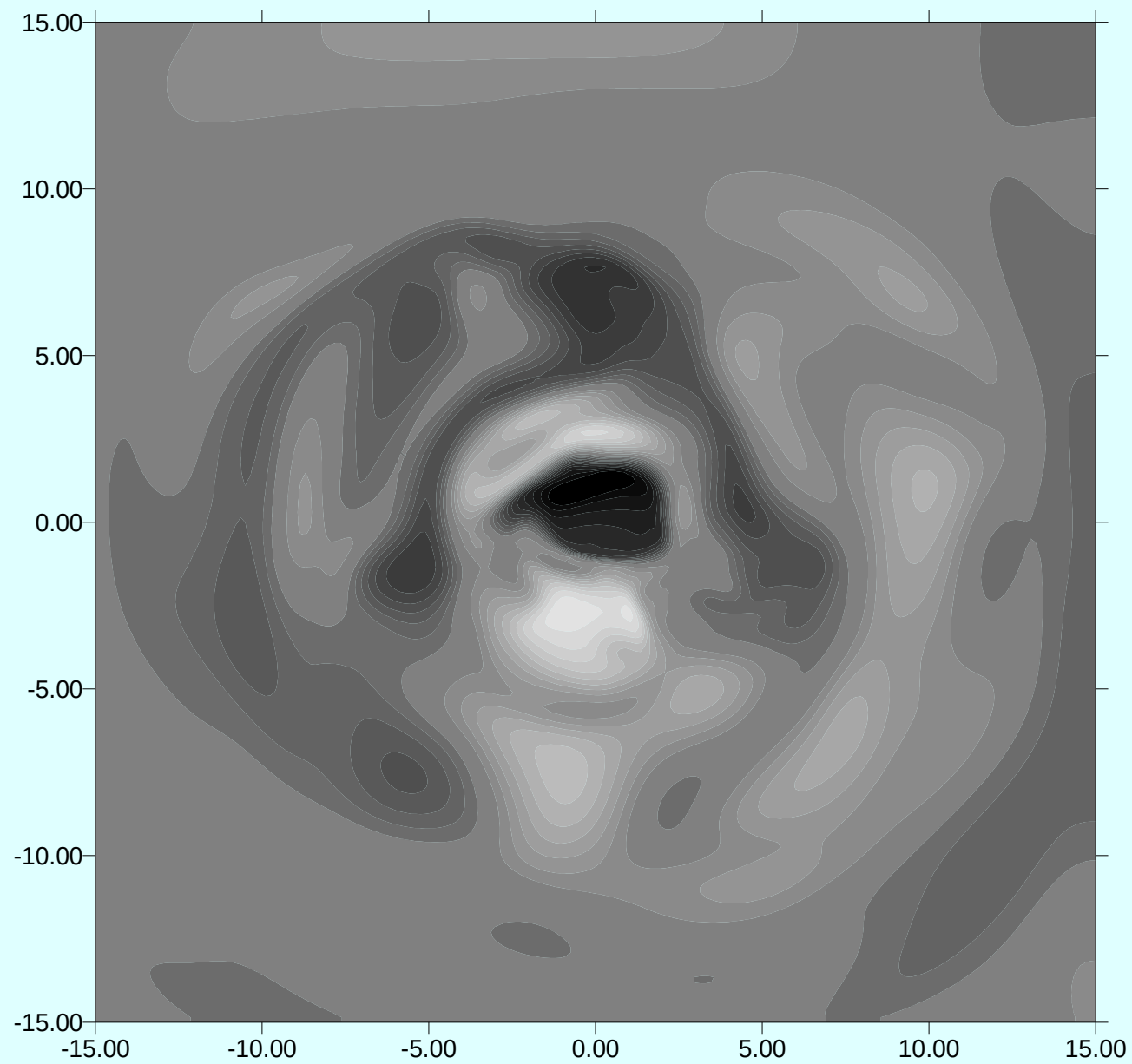


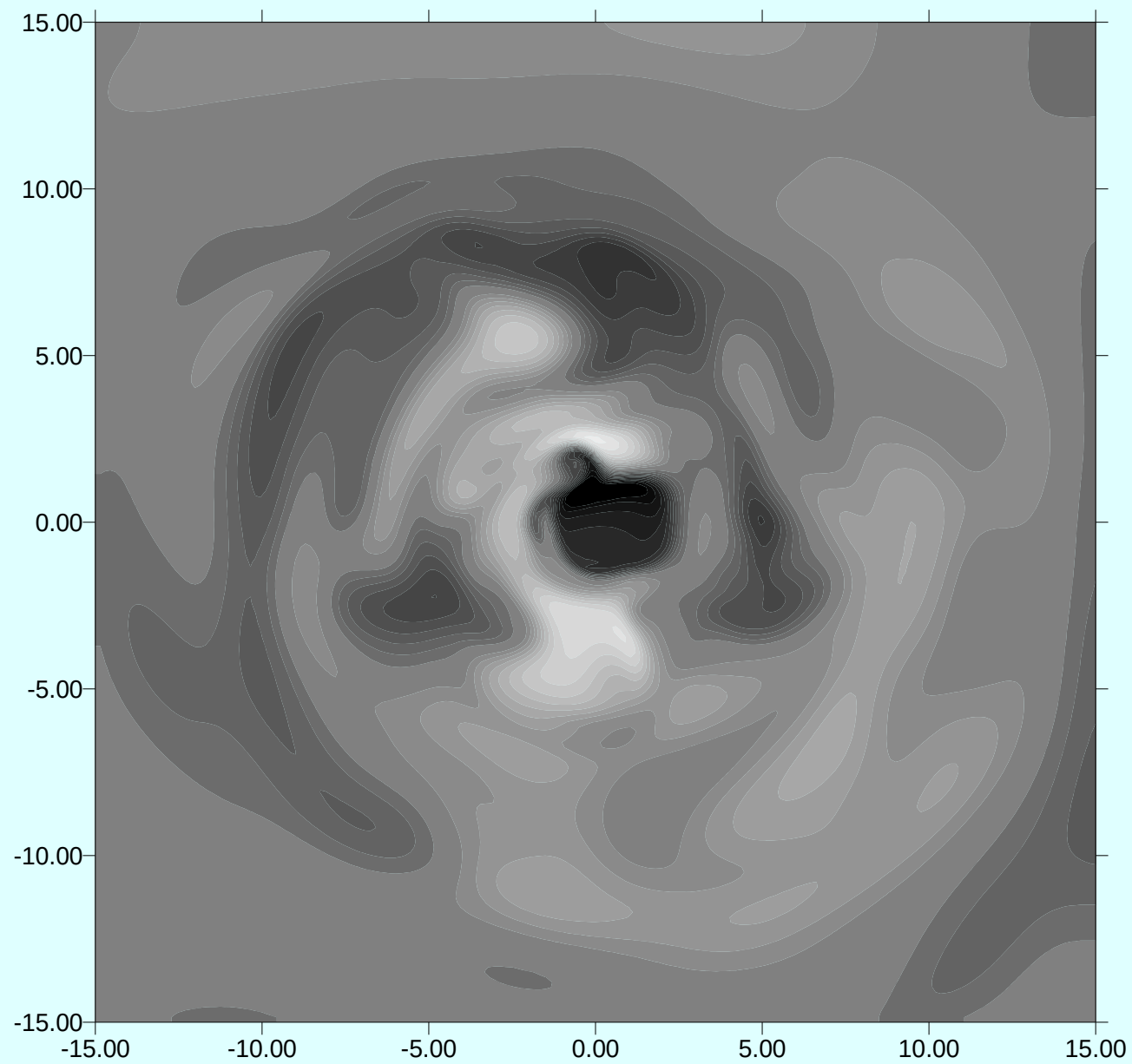


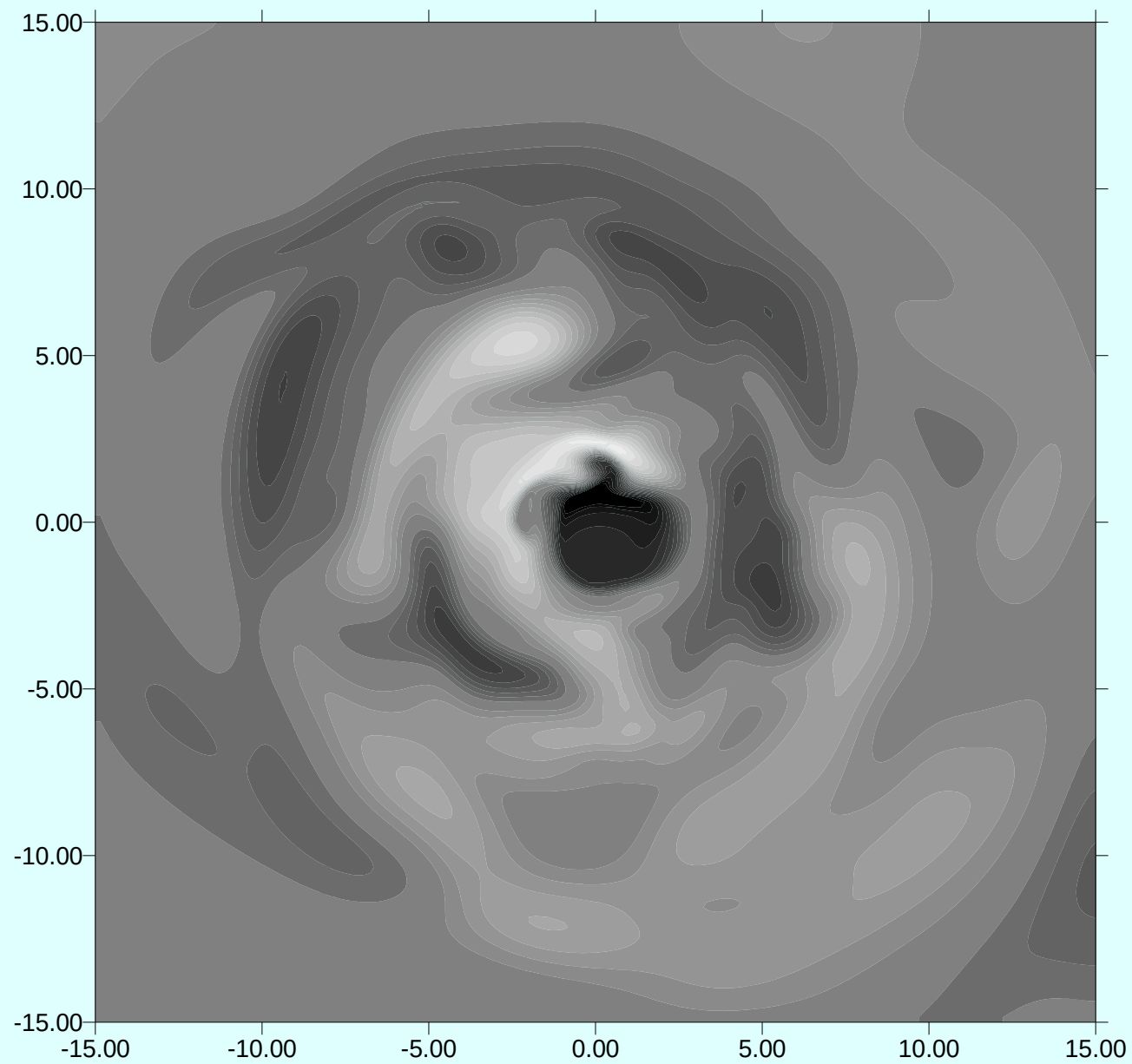


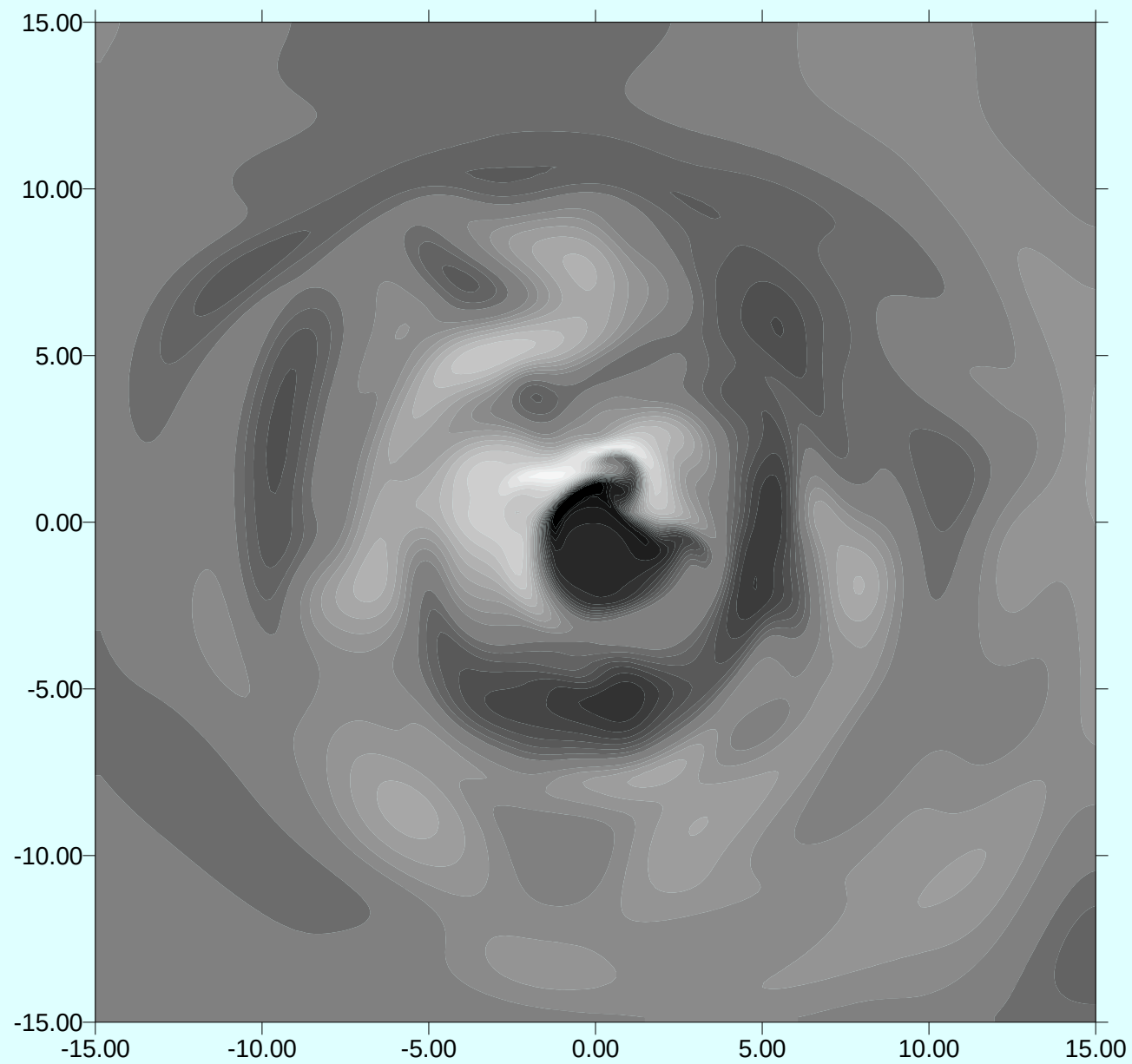


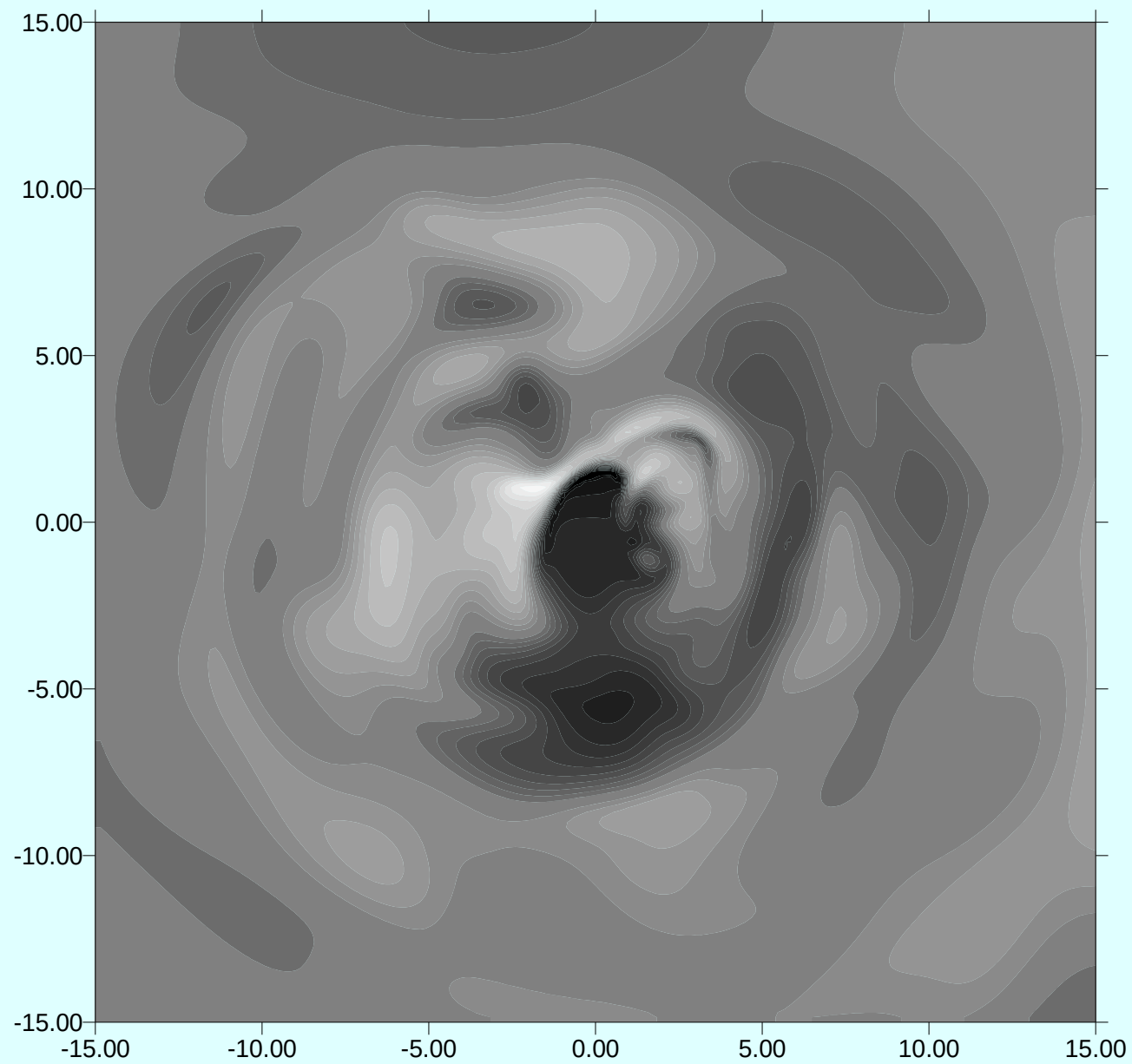






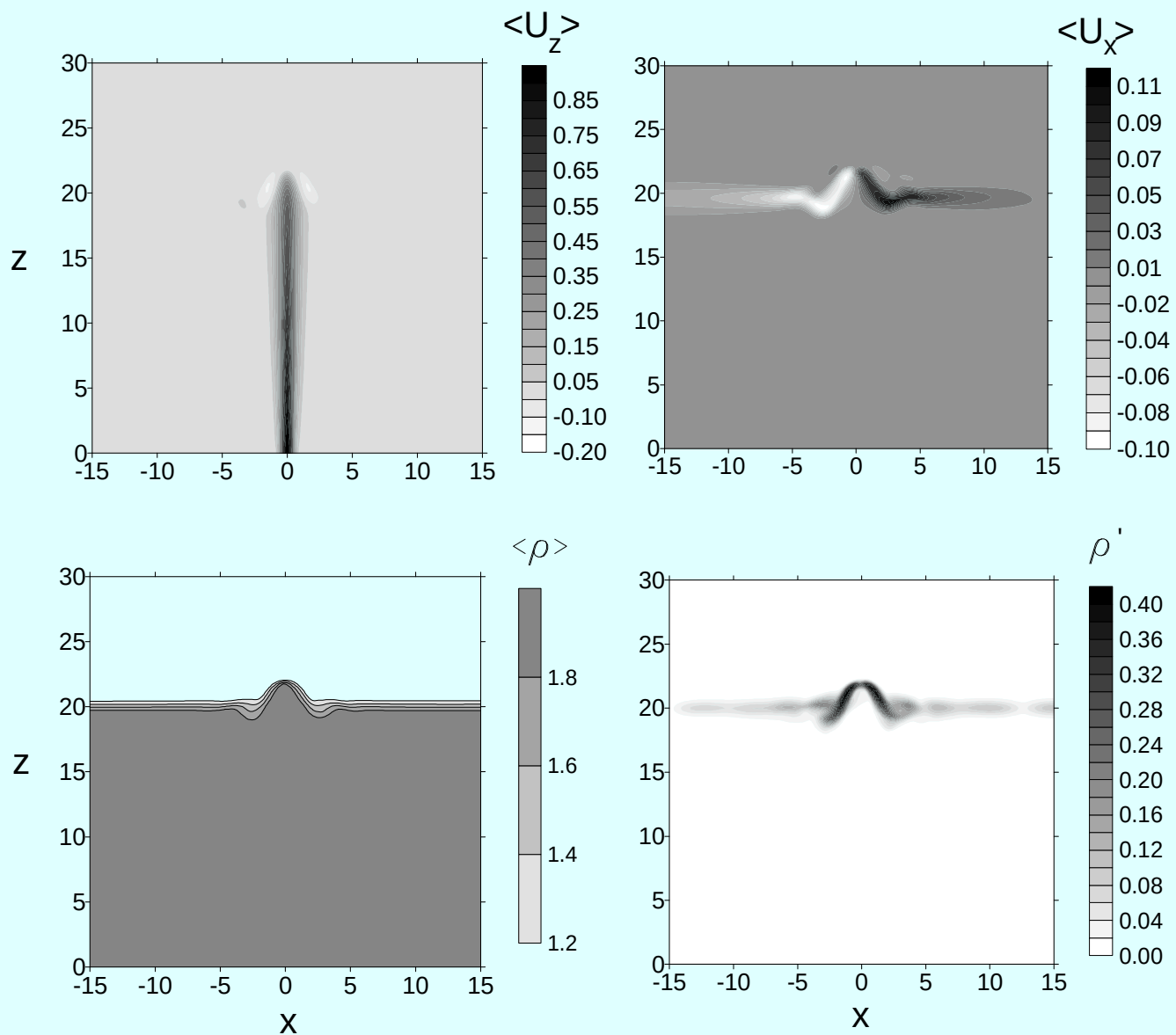






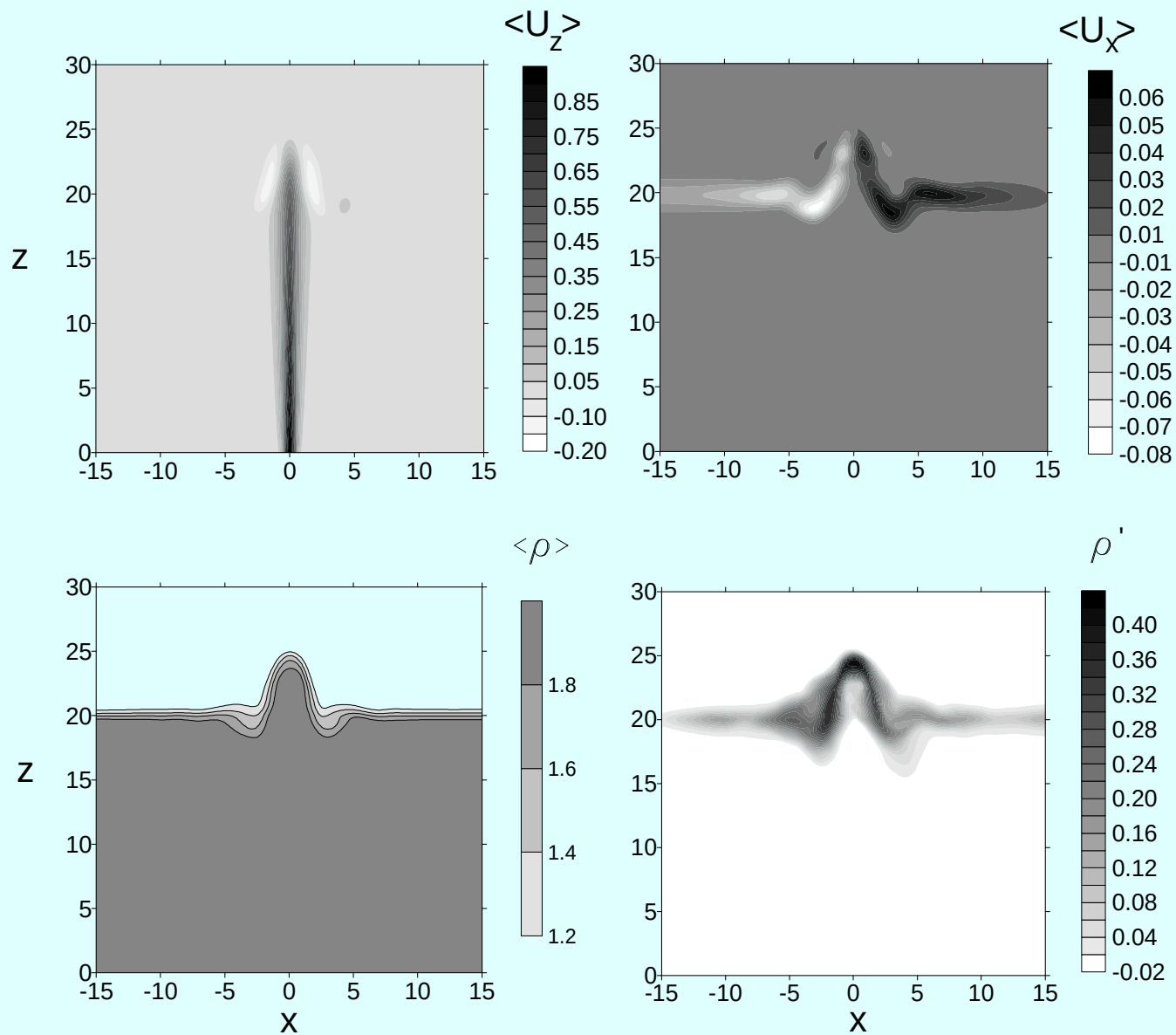
Средние поля и флуктуации скорости и плотности.

$Fr = 4$

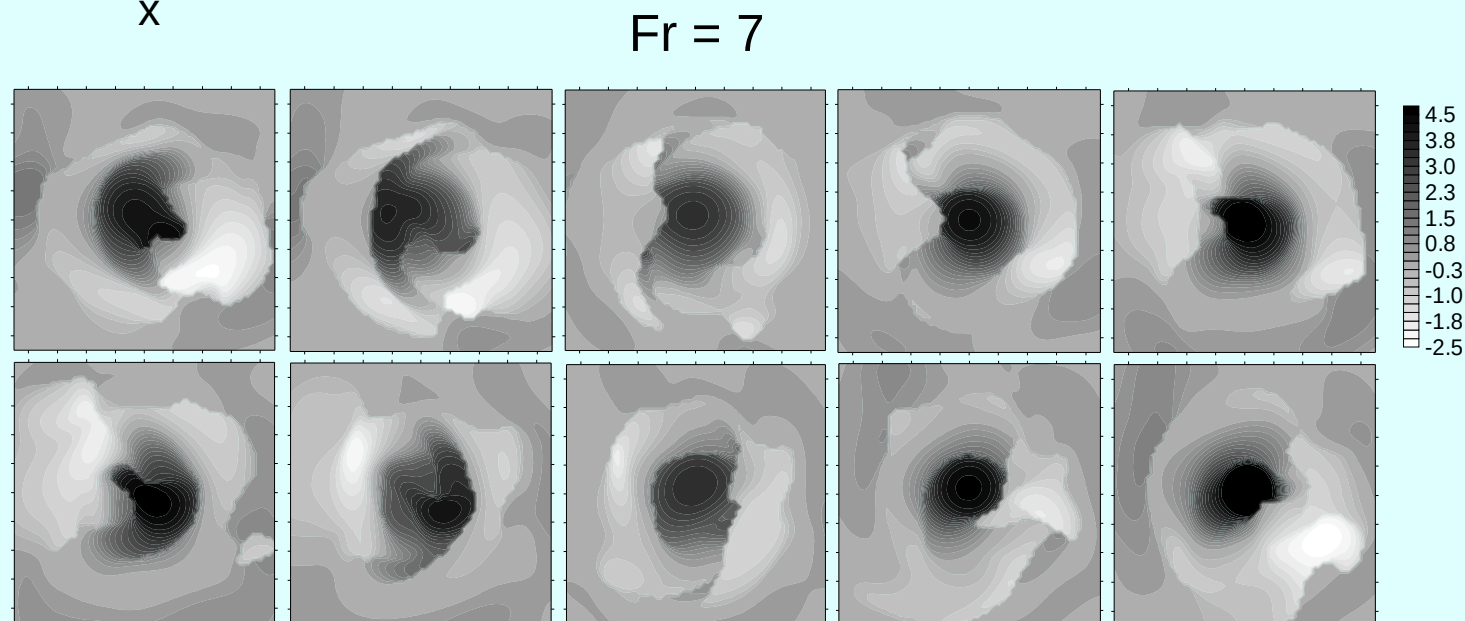
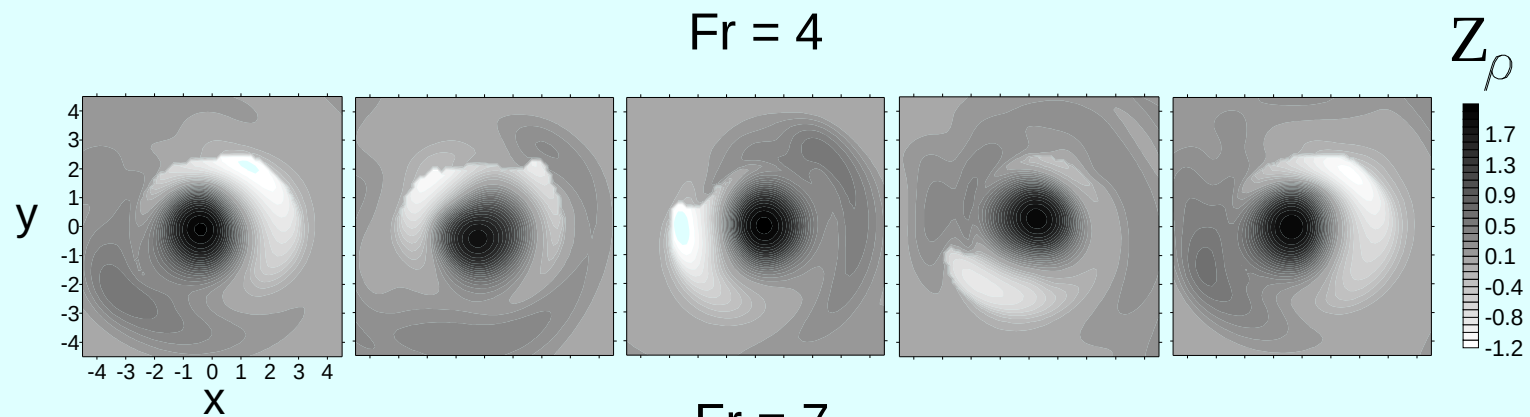


Средние поля и флуктуации скорости и плотности.

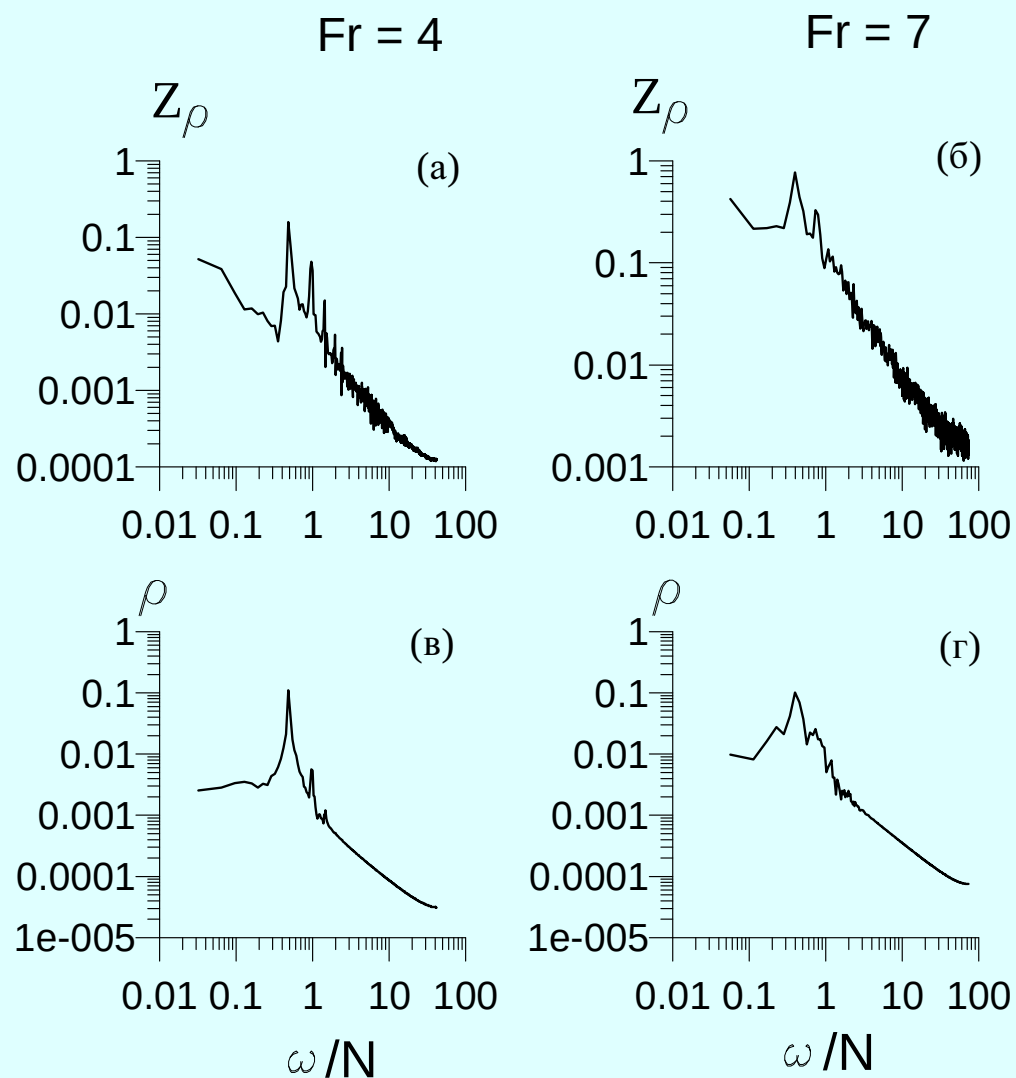
$Fr = 7$



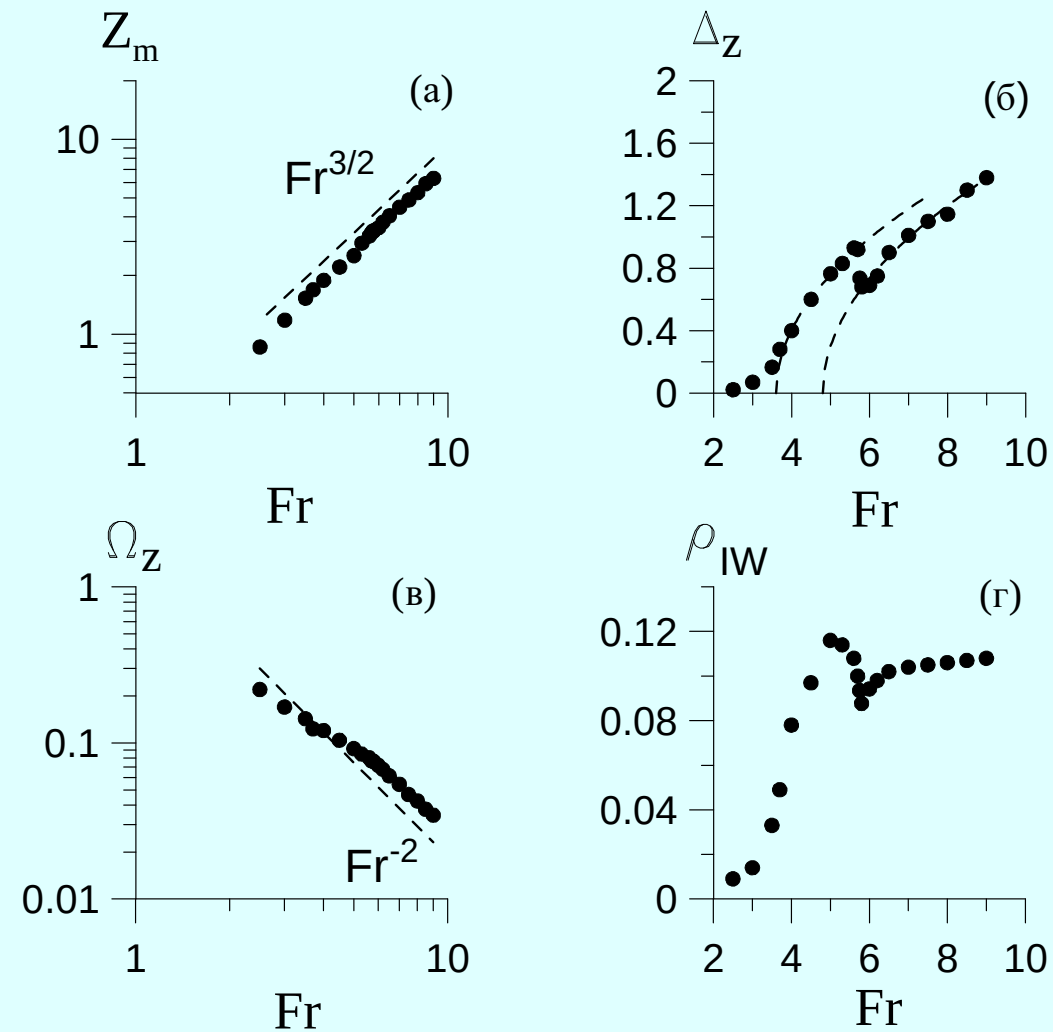
Изопикническая поверхность $Z_\rho(x, y) - z_0$ при $\rho = 1.5$



**Спектры осцилляций изопикнической поверхности в области
верхушки фонтана и внутренних волн в пикноклине на расстоянии
10 безразмерных единиц от центра фонтана**



Зависимости от Fr высоты фонтана Z_m
 дисперсии и частоты осцилляций верхушки фонтана Δ_z и Ω_z
 амплитуды внутренних волн ρ_{IW}



Высота турбулентного фонтана Turner (1966) $Z_m^t \sim Fr$

Высота ламинарного фонтана $Z_m^l \sim U^2 / (Dg\Delta\rho / \rho) \sim Fr^2$

Высота нестационарного фонтана $Z_m \sim Fr^{3/2}$

Аппроксимация для дисперсии $\Delta_z = \left(\frac{2\gamma}{\alpha} (Fr - Fr_c) \right)^{1/2}$

Асимптотика для частоты $\Omega_z \sim Dg\Delta\rho / (\rho U^2) \sim Fr^{-2}$

Конкуренция мод колебаний осциллирующего фонтана

Представим поле скорости осциллирующего фонтана при малой надкритичности в виде суммы стационарного решения и двух мод колебаний:

$$U_i(x, y, z, t) = A_0 U_{0i}(x, y, z) + \operatorname{Re}\{A_1(t)U_{1i}(x, y, z) + A_2(t)U_{2i}(x, y, z)\}$$

где амплитуды мод :

$$A_{1,2}(t) \equiv A_{1,2}(\beta_{1,2}t) \exp(-i\omega_{1,2}t)$$

$$\beta_{1,2} = \gamma_{1,2}(Fr - Fr_{1,2})$$

Будем полагать $Fr_1 < Fr_2$

В случае малой надкритичности предположим также

$$\omega_{1,2} \gg \beta_{1,2} \quad \text{и} \quad |\omega_1 - \omega_2| \gg \beta_{1,2}$$

Конкуренция мод колебаний осциллирующего фонтана

С учетом нелинейного самовоздействия и взаимодействия мод усредненная по «быстрым» осцилляциям система уравнений для амплитуд мод имеет вид:

$$\frac{d|A_1|^2}{dt} = 2\gamma_1(Fr - Fr_1)|A_1|^2 - \alpha_1|A_1|^4 - r_1|A_1|^2|A_2|^2$$

$$\frac{d|A_2|^2}{dt} = 2\gamma_2(Fr - Fr_2)|A_2|^2 - \alpha_2|A_2|^4 - r_2|A_1|^2|A_2|^2$$

Выполним замену переменных:

$$|A_1|^2 = \frac{2\gamma_1}{\alpha_1}(Fr - Fr_1)m_1 \quad |A_2|^2 = \frac{2\gamma_2}{\alpha_2}(Fr - Fr_2)m_2$$

Введем «медленное» время: $\tau = 2\gamma_1(Fr - Fr_1)t$

Конкуренция мод колебаний осциллирующего фонтана

Система уравнений для амплитуд мод:

$$\frac{dm_1}{d\tau} = m_1 - m_1^2 - R_1 m_1 m_2$$

$$\frac{dm_2}{d\tau} = \mu m_2 - m_2^2 - R_2 m_1 m_2$$

где $R_{1,2} = r_{1,2} / \alpha_{2,1}$ и введен новый «управляющий» параметр:

$$\mu = \frac{\gamma_2 (Fr - Fr_2)}{\gamma_1 (Fr - Fr_1)}$$

$$-\infty < \mu \leq \gamma_2 / \gamma_1 \text{ при } Fr_1 \leq Fr < \infty$$

Решения для амплитуд мод

$(m_1, m_2) = (0, 0)$ - стационарный фонтан, неустойчиво при $Fr > Fr_1$

$(m_1, m_2) = (1, 0)$ - генерируется 1я мода, устойчиво при $\mu < R_2$

$(m_1, m_2) = (0, \mu)$ - Генерируется 2я мода, устойчиво при $\mu > 1/R_1$

$(m_1, m_2) = \left(\frac{1 - \mu R_1}{1 - R_1 R_2}, \frac{\mu - R_2}{1 - R_1 R_2} \right)$ - двухмодовый режим

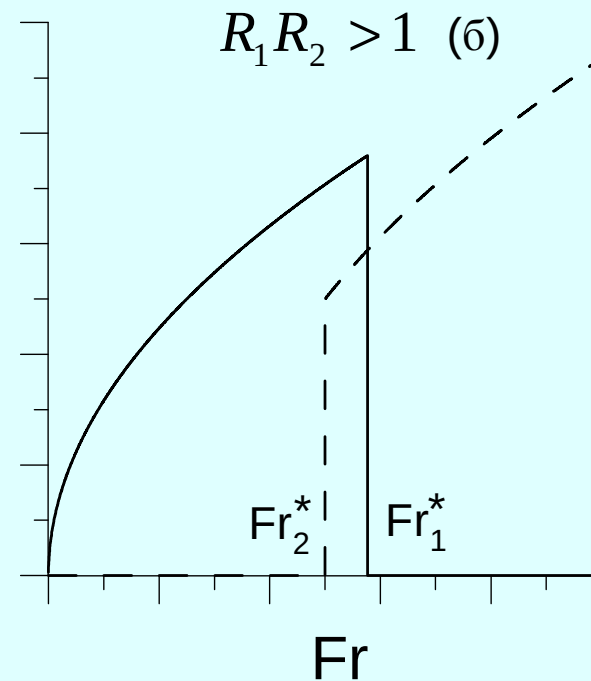
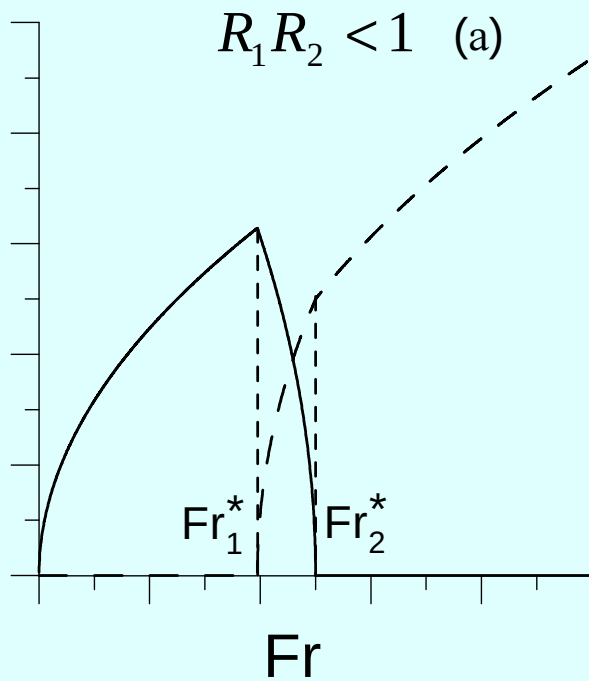
устойчив при $R_1 R_2 < 1$ («слабая» связь мод)

В случае $R_1 R_2 > 1$ («сильной» связи мод) двухмодовый режим

неустойчив, и при $1/R_1 < \mu < R_2$ решение бистабильно

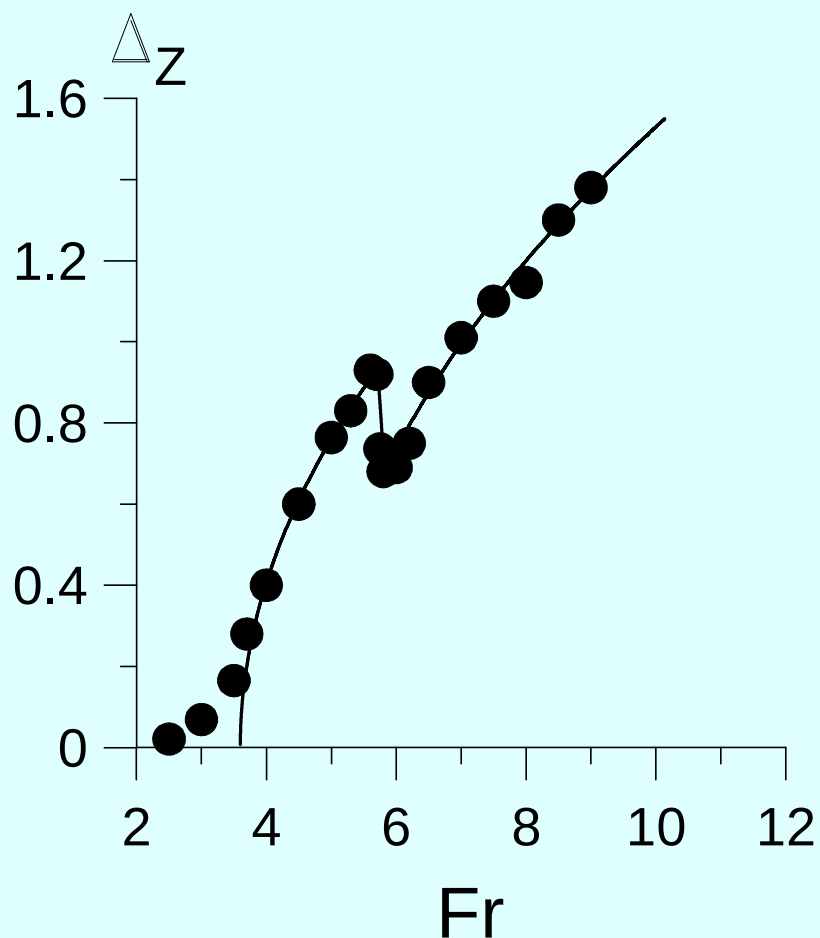
Решения для амплитуд мод

————— $|A_1|$
 - - - - - $|A_2|$



$$Fr_1^* = Fr(\mu = R_2) \quad Fr_2^* = Fr(\mu = 1/R_1)$$

Сравнение с результатами численного моделирования (символы)



$$\Delta_z = \left(|A_1|^2 + |A_2|^2 \right)^{1/2}$$

$$\frac{2\gamma_1}{\alpha_1} \approx 0.41 \quad \frac{2\gamma_2}{\alpha_2} \approx 0.45$$

$$Fr_1 \approx 3.6 \quad Fr_2 \approx 4.8$$

$$R_1 \approx 2 \quad R_2 \approx 0.47$$

Заключение

При достаточно больших числах Фруда (Fr) фонтан совершает автоколебания, сопровождающиеся генерацией внутренних волн в пикноклине. Можно различать две моды автоколебаний. Частота осцилляций фонтана монотонно уменьшается с ростом Fr и совпадает с частотой внутренних волн. Зависимость амплитуды осцилляций фонтана хорошо согласуется с решением теоретической модели конкуренции двух мод в режиме мягкого самовозбуждения.

