1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Во многих областях физики возникают задачи, в которых динамические переменные можно разделить на "быстрые" и "медленные". Для их исследования часто применяется метод усреднения. Метод усреднения – это общее название для методов теории возмущений, основанных на идее разделения движений на плавный дрейф и быстрые осцилляции. Одним из ключевых понятий, используемых при исследовании систем с быстрыми и медленными переменными, является понятие об адиабатическом инварианте (АИ) – величине, приближенно сохраняющейся в процессе движения.

Среди многочисленных приложений теории адиабатических инвариантов можно выделить, например, описание движения заряженных частиц в магнитных ловушках, движения квазичастиц в электромагнитных полях в твердых телах, распространение волн в волноводах в приближении геометрической оптики. В последние два десятилетия значительно возрос интерес к исследованию с помощью теории адиабатических инвариантов задач атомной и молекулярной физики (квазиклассический атом водорода в электромагнитных полях различных конфигураций, атом гелия и двухатомные молекулы под действием возмущений и т.д.).

В теории адиабатических инвариантов в последние годы большое внимание уделяется как поиску условий "вечного" сохранения АИ, так и условий, при которых сохранение АИ нарушается [1, 2, 3]. Важность такого рода исследований связана с тем, что если в процессе движения АИ сохраняется, то движение близко к регулярному, в то время как разрушение адиабатической инвариантности приводит к хаотической динамике.

Среди причин, приводящих к стохастизации движения в системах, близких к интегрируемым, можно выделить расщепление сепаратрис и, как следствие, образование в их окрестности стохастического слоя [4, 5] (а в многомерном случае - возникновение диффузии Арнольда [6]), перекрытие резонансов и образование стохастической паутины [2, 7], а также разрушение адиабатической инвариантности при прохождении через резонансы и захватах в резонанс [8, 9, 10] и при прохождении через сепаратрису [11, 12, 13, 14]. При этом важным является тот факт, что разрушение адиабатической инвариантности ведет к образованию области хаоса, размер которой велик при сколь угодно малом возмущении (в то время как остальные причины приводят к возникновению области хаотической динамики, размер которой стремится к нулю при стремлении к нулю величины возмущения).

В настоящей диссертации исследуется разрушение адиабатической инвариантности при прохождении через резонансы и захватах в резонанс и при переходах через сепаратрису в гамильтоновых системах. Рассматриваются четыре класса задач: нелинейная динамика релятивистской заряженной частицы под действием постоянного однородного магнитного поля и плоской электростатической или электромагнитной волны; динамика линий тока в модели плавно-нестационарного конвективного течения; динамика частицы в прямоугольном и эллиптическом биллиардах с медленно изменяющимися границами; динамика плоской кулоновской задачи трех тел, являющейся классической моделью молекулярных систем типа молекулярного иона водорода.

Первый класс задач продолжает привлекать внимание исследователей в связи с изучением ускорения заряженных частиц в космических лучах и исследованием нелинейной динамики заряженных частиц в лазерных ускорителях [15, 16, 17].

Задача о динамике линий тока в модели плавно-нестационарного конвективного течения, рассматриваемая в работе, схожа с задачей, которая изучалась теоретически и экспериментально в работах Т.Соломона [18]. Модель представляет собой ряд конвективных валов, который под действием возмущения медленно осциллирует в направлении, перпендикулярном к осям валов. Ранее такое течение исследовалось лишь для случая высокочастотных осцилляций специального вида, а вопрос о динамике системы под влиянием медленного возмущения общего вида оставался открытым.

Третий класс задач – динамика частицы в прямоугольном и эллиптическом биллиардах с медленно изменяющимися границами – является актуальным в связи с возможностью применения результатов для теоретического исследования движения атомов в электромагнитных ловушках [19], распространения волн в волноводах в приближении геометрической оптики. Кроме того, оставался открытым вопрос о применимости общей теории, развитой для гладких систем [20, 21], к этим биллиардам.

"Задача трех тел" [22] является одной из самых знаменитых задач классической механики и исследуется на протяжении уже более чем 240 лет [23]. Она возникает при рассмотрении проблем небесной механики [24], одноэлектронных молекулярных ионов [25, 26], высоковозбужденных состояний в атомах [27], экзотических молекулярных системах [28]. В задачах трех тел массы взаимодействующих частиц часто различаются на порядки (то есть масса некоторой частицы гораздо больше остальных, или наоборот). В гравитационной задаче трех тел (ГЗТТ) силы притяжения между частицами зависят от их масс, в то время как в кулоновской задаче трех тел (КЗТТ) силы взаимодействия зависят от зарядов частиц, которые обычно являются величинами одного порядка. В результате исследование КЗТТ с точки зрения теории возмущений существенно отличается от исследования ГЗТТ в небесной механике. Полное описание динамики в задаче трех тел даже в случае упрощающих предположений (большое различие масс) является открытой проблемой.

Основные цели работы:

При исследовании поведения релятивистской заряженной частицы под действием постоянного однородного магнитного поля и плоской электростатической или электромагнитной волны основными целями являются:

- описание структуры фазового пространства системы и возможных типов движения частицы;
- вывод условий возможности захвата в резонанс и неограниченного ускорения частицы;
- исследование диффузии адиабатического инварианта вследствие многократных переходов через резонанс.

При исследовании поведения линий тока (траекторий пробных частиц) в модели плавно-нестационарного конвективного течения основными целями являются:

- вывод условий возможности квазирегулярного поведения линий тока и транспорта (дрейфа) частиц примеси вследствие этого;
- исследование диффузии адиабатического инварианта вследствие многократных переходов через сепаратрису;
- определение характерного времени развития хаотической адвекции.

При исследовании движения частицы в прямоугольном и эллиптическом биллиардах с медленно изменяющимися границами основными целями являются:

- исследование поведения адиабатических инвариантов при прохождении через резонанс; оценка изменения адиабатических инвариантов в резонансной области;
- исследование диффузии адиабатического инварианта вследствие многократных переходов через резонансы;
- исследование возможности применения общей теории [20], развитой для гладких систем, к системам с ударами.

При исследовании резонансных явлений в кулоновской задаче трех тел основными целями являются:

- приведение гамильтониана системы путем канонических преобразований к виду, допускающему возможность применения общей теории [20];
- исследование поведения адиабатических инвариантов при прохождении через резонанс; оценка изменения адиабатических инвариантов в резонансной области;
- исследование вопроса о возможности захвата в резонанс в этой системе.

Научная новизна

Разработанные в последние годы методы [20, 21] позволяют провести полное описание динамики в ряде задач, для которых ранее имелось описание лишь специальных режимов. В работе проведено полное описание динамики релятивистской заряженной частицы под влиянием однородного магнитного поля и поля высокочастотной электромагнитной и/или электростатической волны. Исследована структура фазового пространства системы; получена формула для скачка адиабатического инварианта при пересечении резонансной поверхности; условие для неограниченного ускорения частицы, захваченной в резонанс, в случае наклонного распространения волны. Показано, что накопление скачков адиабатического инварианта при многократных пересечениях резонанса приводит к диффузии адиабатического инварианта; проведен анализ статистических свойств последовательности скачков адиабатического инварианта при пересечении резонанса. Исследована динамика линий тока в модели плавно-нестационарного конвективного течения. Модель представляет собой ряд конвективных валов, который под действием возмущения медленно осциллирует в направлении, перпендикулярном к осям валов. Такое течение ранее исследовалось лишь для случая высокочастотных осцилляций специального вида. С помощью формулы для скачка адиабатического инварианта при пересечении сепаратрисы дана оценка времени развития хаотической адвекции. Найдены условия, при которых в системе возможен почти регулярный транспорт. Исследована нелинейная динамика частицы в прямоугольном и эллиптическом биллиардах с медленно изменяющимися границами. Продемонстрирована возможность применения общей теории, развитой для гладких динамических систем, к этим биллиардам. Исследована нелинейная динамика частиц в плоской кулоновской задаче трех тел, являющейся классической моделью молекулярных систем типа молекулярного иона водорода. Найдены численно и объяснены аналитически характерные особенности явления захвата в резонанс и рассеяния на резонансе. Показано, что накопление скачков адиабатических инвариантов при многократных пересечениях резонансных поверхностей приводит к диффузии адиабатических инвариантов.

Научное и практическое значение работы

Результаты работы изложены в четырех главах диссертации. Полученные в первой главе диссертации результаты могут быть использованы при исследовании нелинейной динамики заряженных частиц в лазерных ускорителях и ускорения заряженных частиц в космических лучах; результаты второй главы диссертации могут быть использованы при исследовании хаотического размешивания примесей и транспорта в гидродинамических течениях; результаты третьей главы – при исследование движения атомов в электромагнитных ловушках [19], распространения волн в волноводах в приближении геометрической оптики и т.д; результаты четвертой главы – при исследовании атомных и молекулярных систем в квазиклассической области.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из четырех глав, введения и заключения, изложена на 163 страницах машинописного текста и содержит 58 рисунков и 95 наименований в списке цитируемой литературы.

Апробация результатов

Основные результаты работы опубликованы, они докладывались и обсуждались на международных конференциях Equadiff -99 (Берлин, 1999), "Современная теория динамических систем и ее приложения в небесной механике" (Москва, 2002), научных семинарах в РНЦ "Курчатовский институт", в МГУ, в Институте М.Планка физики сложных систем (Германия), ИКИ РАН.

По теме диссертации опубликовано 6 работ, список которых приведен в конце автореферата.

2 Содержание работы

В **первой главе** в рамках теории возмущений рассматриваются задачи о динамике заряженной частицы под действием постоянного магнитного поля и плоской электростатической волны, или комбинации из плоской электростатической и электромагнитной волны. Волны предполагаются высокочастотными. Движение описывается гамильтонианом с 2 степенями свободы (в безразмерных переменных):

$$\mathcal{H} = -vI \; + \; [1 + I^2 + p^2 + q^2 + 2Iq\sin\alpha - 2\varepsilon(q\kappa_2\cos\alpha\cos k\phi + p\kappa_1\sin k\phi) + \\ + O(\varepsilon^2)]^{1/2} \; + \; \varepsilon\mu\cos k\phi,$$

где $(p, \varepsilon^{-1}q)$ и (ϕ, I) – пары канонически сопряженных переменных, α - угол между направлением магнитного поля и волновым вектором плоской волны, ε – малый параметр.

Гамильтониан системы можно разделить на невозмущенную часть

$$\mathcal{H}_0 = -vI + \sqrt{1 + I^2 + p^2 + q^2 + 2Iq\sin\alpha} \tag{1}$$

и возмущение $\varepsilon\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_0$, которое можно представить в виде

$$\varepsilon\mathcal{H}_1 = -\varepsilon\frac{q\kappa_2\cos\alpha\cos k\phi + p\kappa_1\sin k\phi}{\sqrt{1 + I^2 + q^2 + p^2 + 2Iq\sin\alpha}} + \varepsilon\mu\cos k\phi + O(\varepsilon^2). \tag{2}$$

В пространстве (I, p, q) уравнение $\mathcal{H}_0 = \text{const}$ определяет изоэнергетическую поверхность (при движении частица все время находится в ε-окрестности этой поверхности). В зависимости от соотношений между $\mathcal{H}_0$, v, и α эта поверхность второго порядка принимает различный вид.

Легко заметить, что система имеет два временных масштаба: переменная ϕ является быстрой, остальные переменные – медленные. Следовательно, если $\dot{\phi} \neq 0$, динамику системы можно изучать с помощью метода усреднения.

Усредняя уравнения движения системы (1) по быстрой переменной ϕ, получаем $I =$const. Следовательно, в этом приближении траектория частицы в координатах (I, p, q) является пересечением изоэнергетической поверхности $\mathcal{H}_0 =$const и плоскости $I =$const. Назовем эту траекторию адиабатической (она является ларморовской окружностью). В действительности значение I сохраняется вдоль траектории вдали от резонанса с точностью порядка ε на временных интервалах порядка $1/\varepsilon$.

Метод усреднения неприменим в окрестности резонанса, где $\partial\mathcal{H}_0/\partial I = 0$. Вдоль траектории, которая пересекает резонанс, значение I может измениться значительно вследствие явлений захвата в резонанс и рассеяния на резонансе. При захвате в резонанс фазовая точка покидает окрестность адиабатической траектории и движется вдоль резонансной поверхности. При этом в зависимости от параметров системы фазовая точка может либо остаться захваченной в резонанс вечно (что приводит к неограниченному ускорению), либо покинет резонанс по прошествии некоторого времени и продолжит свое движение вдоль другой адиабатической траектории.

Начальные условия для траекторий с захватом в резонанс и траекторий, пересекающих резонансную область без захвата в резонанс, перемешаны в фазовом пространстве системы, если ε мало. Малое, порядка ε, изменение начальных условий траектории может существенно изменить характер движения. Следовательно, имеет смысл рассматривать захват как случайное событие и исследовать его вероятность. Этот подход для систем с переходами через сепаратрису был предложен в статье [29]. В диссертации показано, что при выполнении определенного условия захваченная в резонанс фазовая точка остается захваченной вечно (режим неограниченного ускорения).

Фазовая точка, пересекающая резонансную поверхность без захвата в резонанс, испытывает скачок адиабатического инварианта порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Получена формула для этого скачка, которая проверена численно (для случая чисто электростатической волны). Многократные переходы через резонанс приводят к диффузии адиабатического инварианта. Исследованы статистические свойства этого процесса, получены оценки для коэффициента диффузии.

Во **второй главе** теория адиабатических инвариантов применяется при исследовании двумерного нестационарного течения, являющегося моделью течения в экспериментах Т.Соломона [18] по размешиванию примесей. Рассматривается течение, представляющее собой ряд конвективных валов, который медленно осциллирует в направлении, перпендикулярном к осям валов.

После перехода к движущейся системе координат гамильтониан системы принимает вид

$$\mathcal{H}(y, x, \tau) = \sin x \sin y + \varepsilon y G(\tau), \quad \tau = \varepsilon t, \tag{3}$$

где $G(\tau)$ – некоторая возмущающая функция.

В случае малых ε задача может быть рассмотрена в терминах сохранения адиабатического инварианта. Когда возмущенная фазовая траектория (линия тока) пересекает сепаратрису невозмущенной системы, значение адиабатического инварианта испытывает скачок. Показано, что такие скачки адиабатического инварианта при последовательных переходах через сепаратрису коррелированы.

Эта корреляция разрушается только тогда, когда значение фазы, описывающей переход через сепаратрису, попадает в некоторый определенный малый интервал. Такая корреляция замедляет диффузию адиабатического инварианта. Если бы адиабатический инвариант сохранялся вечно вдоль фазовых траекторий системы, транспорт в системе был бы регулярным (то есть траектории пробных частиц в расширенном фазовом пространстве лежали бы на инвариантных торах). Хорошее (хотя не вечное) сохранение адиабатического инварианта в системе приводит к почти регулярному транспорту на больших временах (порядка $\varepsilon^{-3}\ln\varepsilon$). В случае возмущения общего вида капля пассивной примеси (например, краски), помещенной первоначально в некоторую конвективную ячейку, расплывается на расстояние порядка ε^{-3}. Это расплывание сильно отличается от обычной диффузии. В частности, диаметр области, окрашенной краской, растет почти линейно со временем. В рассматриваемой задаче с помощью формулы для скачка адиабатического инварианта при пересечении сепаратрисы дана оценка времени развития хаотической адвекции. Найдены условия, при которых в системе возможен почти регулярный транспорт.

В **третьей главе** рассматриваются две задачи о динамике частицы в прямоугольном и эллиптическом биллиардах с медленно движущимися стенками.

Рассмотрим частицу, движущуюся в двумерном прямоугольном биллиарде, который медленно вращается с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$. Считается, что частица взаимодействует со стенками по закону упругого отражения. Гамильтониан системы во вращающейся системе координат имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \omega(p_1 q_2 - p_2 q_1) + U(q_1, q_2), \tag{4}$$

где p_i, q_i – канонически сопряженные импульсы и координаты соответственно, а $U(q_1, q_2)$ – потенциал, описывающий воздействие твердых стенок:

$$U(q_1, q_2) = \begin{cases} \infty, & \text{если } |q_1| > d_1 \text{ или } |q_2| > d_2, \\ 0, & \text{если } \quad |q_1| < d_1,\ |q_2| < d_2, \end{cases} \tag{5}$$

где $2d_i$ – длины сторон биллиарда. Длины сторон биллиарда являются медленными функциями времени: $d_i = d_i(\varepsilon t)$, где $\varepsilon \sim \omega \ll 1$ является малым параметром.

Для невозмущенной системы (без вращения и движения стенок) можно с помощью канонического преобразования ввести переменные действие - угол $(I_i, \phi_i),\ i = 1, 2$.

Система находится в резонансе (m:n), если выполняется следующее резонансное условие :

$$\frac{mI_1}{d_1^2} - \frac{nI_2}{d_2^2} = 0,$$

где m, n - целые числа.

При наличии возмущения переменные I_i являются приближенными адиабатическими инвариантами: они хорошо сохраняются всюду, кроме окрестностей резонансов малого порядка (порядок резонанса $k = |m| + |n|$).

С изменением времени изменяются значения d_i, и частица, первоначально далекая от резонанса, может приблизиться к нему. В результате в системе наблюдаются эффекты рассеяния на резонансах и захвата в резонанс.

Продемонстрировано, что общая теория, развитая для гладких систем, хорошо описывает явления, происходящие в данной системе.

Аналогичная ситуация имеет место и для эллиптического биллиарда. Гамильтониан невозмущенной системы в эллиптических координатах $\xi = r_1 + r_2, \quad \eta = r_1 - r_2$ (r_1, r_2 – расстояния между частицей и фокусами биллиарда, расстояние между фокусами – $2c$) имеет следующий вид:

$$H_0 = 2p_\xi^2 \frac{\xi^2 - 4c^2}{\xi^2 - \eta^2} + 2p_\eta^2 \frac{4c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} + U(\xi, a), \tag{6}$$

где a - большая полуось, а $U(\xi, a)$ - потенциал твердой стенки биллиарда:

$$U(\xi, a) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \xi > 2a, \\ 0, & \text{если } \xi < 2a. \end{cases} \tag{7}$$

Невозмущенную систему можно рассматривать как два несвязанных между собой нелинейных осциллятора. Как и в случае прямоугольного биллиарда, вводятся переменные действие - угол. В возмущенной системе переменные "действие" хорошо сохраняются вдали от резонансных поверхностей, при прохождении через резонанс наблюдаются эффекты захвата в резонанс и рассеяния на резонансе.

В **четвертой главе** диссертации исследуются резонансные явления (захват в резонанс и рассеяние на резонансе) в кулоновской задаче трех тел. В задачах трех тел массы взаимодействующих частиц часто различаются на порядки (то есть масса некоторой частицы гораздо больше остальных, или наоборот). В гравитационной задаче трех тел (ГЗТТ) силы притяжения между частицами зависят от их масс, в то время как в кулоновской задаче трех тел (КЗТТ) силы взаимодействия зависят от зарядов частиц, которые обычно являются величинами одного порядка. В настоящей диссертации рассматривается классическая динамика плоской КЗТТ, являющейся моделью систем типа молекулярного иона водорода H_2^+: две тяжелые заряженные частицы (массой M) и одна легкая (массой m).

После канонических преобразований, приведенных в четвертой главе диссертации, система описывается гамильтонианом с тремя степенями свободы с быстрыми и медленными переменными:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \;&=\; \frac{1}{4}\left(P_R^2 + \frac{P_\Theta^2}{R^2} + \frac{m}{R} - mE\right)(\cosh 2v - \cos 2u) + \frac{P_v^2 + P_u^2}{R^2} - \frac{2m}{R}\cosh v \\ &+\; \varepsilon \frac{P_R}{2R}\left(P_u \sin 2u - P_v \sinh 2v\right) + \varepsilon \frac{P_\Theta}{2R^2}\left(P_u \sinh 2v + P_v \sin 2u\right) \end{aligned} \tag{8}$$

$$+ \quad \frac{\varepsilon^2}{4R^2}\left(P_v^2 + P_u^2\right)(2 + \cosh 2v + \cos 2u) = \mathcal{F}_0 + \varepsilon\mathcal{F}_1 + O(\varepsilon^2) \equiv 0,$$

где m, M - массы легкой и тяжелых частиц соответственно, E - значение гамильтониана системы в исходных декартовых координатах, малый параметр $\varepsilon = \sqrt{m/M}$. При замороженных медленных переменных (P_R, R) и в пренебрежении членами $O(\varepsilon)$ система интегрируема, допускает возможность введения переменных действие - угол. В возмущенной системе переменные "действие"хорошо сохраняются вдали от резонансных поверхностей, при прохождении через резонанс наблюдаются эффекты захвата в резонанс и рассеяния на резонансе.

Основные результаты и выводы

1. На основе анализа нелинейной задачи исследованы прохождения через резонансы и захваты в резонанс в динамике релятивистской заряженной частицы под влиянием однородного магнитного поля и поля электромагнитной и/или электростатической волны. Получена формула для скачка адиабатического инварианта при пересечении резонансной поверхности, условие неограниченного ускорения частицы, захваченной в резонанс, в случае наклонного распространения волны. Показано, что накопление скачков адиабатического инварианта при многократных пересечениях резонанса приводит к диффузии адиабатического инварианта. Проверены статистические свойства последовательности скачков адиабатического инварианта при пересечении резонанса.

2. Исследована нелинейная динамика линий тока в модели плавно - нестационарного конвективного течения. С помощью формулы для скачка адиабатического инварианта при пересечении сепаратрисы дана оценка времени развития хаотической адвекции. Найдены условия, при которых в системе возможен почти регулярный транспорт.

3. Исследована нелинейная динамика частицы в прямоугольном и эллиптическом биллиардах с медленно изменяющимися границами. Продемонстрирована возможность применения общей теории, развитой для гладких динамических систем, к этим биллиардам. Найдены численно и объяснены аналитически явления захвата частиц в резонанс и рассеяния на резонансе.

4. Исследована нелинейная динамика частиц в плоской кулоновской задаче трех тел, являющейся классической моделью молекулярных систем типа молекулярного иона водорода. Найдены численно и объяснены аналитически характерные особенности явления захвата в резонанс и рассеяния на резонансе. Показано, что накопление скачков адиабатических инвариантов при многократных пересечениях резонансных поверхностей приводит к диффузии адиабатических инвариантов.

Основные положения настоящей диссертации опубликованы в работах:

1. Itin A.P., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A. Captures into resonance and scattering on resonance in dynamics of a charged relativistic particle in magnetic field and electrostatic wave // Physica D. 2000. **V. 141** P. 281.
2. Итин А.П. Захваты в резонанс и рассеяние на резонансе в динамике релятивистской заряженной частицы в магнитном поле и электромагнитной волне // Физика плазмы. 2002. **Т. 28.** С. 639.
3. Itin A.P., Llave R.L., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A. Transport in slowly perturbed convective cell flow // Chaos. 2002. **V. 12**. P. 1043.
4. Itin A.P., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A. Resonant phenomena in slowly perturbed rectangular billiards// Phys. Lett. A. 2001. **V. 291**. P. 133.
5. Itin A.P. Resonant phenomena in classical dynamics of three-body Coulomb systems // Phys. Rev. E. 2003. **V. 67**. P. 026601.
6. Itin A.P., Neishtadt A.I. Resonant phenomena in slowly perturbed elliptic billiards // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. **V. 8**. P. 59.

Список литературы

[1] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике //УМН. 1963. **Т.18.** С. 91.

[2] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука. 1988. 368 с.

[3] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир. 1984. 528с.

[4] Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф. Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость // Успехи мат. наук. 2001. **Т. 56.** Вып. 3. С. 79.

[5] Трещев Д.В. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. М.: ФАЗИС. 1998. 181с.

[6] Арнольд В.И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы //Докл. АН СССР. 1964. **Т.156.** С. 9.

[7] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука. 1991. 240с.

[8] Бакай А.С. Резонансные явления в нелинейных системах //Дифференциальные уравнения. 1966. **Т.2.** С.473.

[9] Neishtadt A.I. On probabilistic phenomena in perturbed systems //Selecta Mathematica Sovietica 1993. **V.12.** P. 195.

[10] Neishtadt A.I. On destruction of adiabatic invariance in multi-frequence systems //EquaDif. International conference on differential equations. 1993. **V.1.** P. 195.

[11] Тимофеев А.В. К вопросу о постоянстве адиабатического инварианта при изменении характера движения //ЖЭТФ. 1978. **Т.75.** С.1303.

[12] Нейштадт А.И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису //Физика плазмы. 1986. **Т.12.** С. 992.

[13] Нейштадт А.И. Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису в системах с двумя степенями свободы //ПММ. 1987. **Т.51.** С.750.

[14] Cary J.R., Escande D.F., Tennyson J. Adiabatic invariant change due to separatrix crossing //Phys. Rev. A. 1986. **V. 34.** P.4256.

[15] Katsouleas T. and Dawson J.M. Unlimited electron acceleration in laser-driven plasma waves // Phys.Rev.Lett. 1985. **V. 51**. P. 392.

[16] Chernikov A.A., Shmidt G., Neishtadt A.I. Unlimited particle acceleration by waves in a magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1992. **V.68**. P. 1507.

[17] Буланов С.В., Сахаров А.С. О влиянии магнитного поля на резонансное ускорение частиц // Физика плазмы. 2000. **V. 26**. С. 1074.

[18] Solomon T.H., Tomas S., and Warner J.L. Chaotic mixing of immiscible impurities in a two-dimensional flow // Phys.Fluids. 1998. **V. 10.** P. 342.

[19] Friedman N., Kaplan A., Carasso D., and Davidson N. Observation of chaotic and regular dynamics in atom-optics billiards // Phys. Rev. Lett. 2001. **V. 86**. P. 1518.

[20] Neishtadt A.I. On adiabatic invariance in two-frequency systems // Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom. NATO ASI Series, Series C. **V. 533**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London. 1999. P. 193.

[21] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС. 2002. 414с.

[22] Whittaker E.T. A Treatise of the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge University Press. Cambridge, England. 1944.

[23] A. Gautier. Essai historique sur le probleme de trois corps. Gauthier-villars. Paris. 1817.

[24] Gutzwiller M.C. Chaos in classical and quantum mechanics. Springer. New York. 1990.

[25] Van der Donk P., Yousif F.B., Mitchell J.B.A., Hickman A.P. Dissociative recombination of H_2^+ // Phys. Rev. Lett. 1991. **V. 67**. P. 42.

[26] Duan Y., Browne C., Yuan J.M. Nonlinear dynamical behaviour of a hydrogen molecular ion and similar three-body Coulomb systems // Phys. Rev. A. 1999. **V. 59**. P. 238.

[27] Richter K., Wintgen D. Stable planetary atom configurations // Phys.Rev.Lett. 1990. **V. 65**. P. 1965.

[28] Benvenuto F., Casati G., Shepelyansky D.L. Chaos in quasiclassical hadronic atom // Phys. Rev. A. 1996. **V. 53**. P. 737.

[29] Лифшиц И.М., Слуцкин А.А., Набутовский В.М. Об особенностях движения заряженных квазичастиц в переменном и неоднородном электромагнитном поле //ЖЭТФ. 1961. **Т. 41.** С. 939.