РАСТУЩИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Оселедчик Ю.С., Кулик Д.И., Павлик С.И., Швец Е.Я.

Запорожская государственная инженерная академия
oseledchik@mail.ru

Аннотация. В работе основное внимание уделяется модификации нелинейного слагаемого вследствие изменения правил построения поверхности и ее структурных особенностей. Обсуждаются механизмы дискретного роста, которые существенны для модификации нелинейности путем изменения степени в нелинейном слагаемом, рассматриваются масштабно-инвариантные свойства. Рассмотрено влияние возможных факторов, приводящих к нелинейности с произвольной степенной зависимостью. Используя технику разложения по степени нелинейности, показаны условия, приводящие к режиму с обратным каскадом по спектру.

Известно, что многие дискретные модели, описывающие баллистическое осаждение на двумерной плоскости, приводят в непрерывном пределе к уравнению Кардара-Паризи-Занга (КПЗ) [1]. Эта модель в 1+1 измерениях описывается следующим образом. Для начала производится разбиение одномерной прямой на равные интервалы, которые нумеруются набором дискретных переменных i. Далее, пусть в момент времени t в точке i высота границы раздела $h_i(t)$. Затем случайно выбирается положение частицы в ячейке i, в которую вертикально по баллистической траектории падает частица. Она прикрепляется к поверхности, как только попадает в состояние с занятым соседним сайтом, в противном случае продолжает движение до тех пор, пока не встречает частицу, лежащую в своей «колонке». Из анализа дискретной модели следует (см., например, работы [2], [3]), что скейлинговые показатели согласуются с теми, которые следуют из уравнения КПЗ. Однако следует помнить, что вывод непрерывных уравнений базируется на последовательном «огрублении» микроскопических уравнений. Иными словами, вероятность перехода вычисляется для конфигурации дискретных переменных $\{h_i(t)\}$, затем путем последовательного огрубления производится переход к системе «гидродинамических» уравнений. Но в первоначальной дискретной модели существуют функции, которые трудно определить при переходе к непрерывной модели. Но так как вероятность перехода – это непрерывная функция, необходима процедура регуляризации такого рода бесконечностей, которая может проводиться несколькими способами, и от которых, собственно говоря, и зависит конечный результат.

Итак, рассмотрим следующую одномерную дискретную модель:

$$h_i(t+1) = \max\,\{h_{i-1}(t)\,,\, h_i(t)\,,\, h_{i+1}(t)\} + \eta_i(t)\,, \qquad (1)$$

где η_i - случайный источник частиц, определяемый соотношениями $\langle h_i(t)\rangle = 0,\ \ \langle h_i(t)\, h_j(t')\rangle = 2D\delta_{ij}\delta_{tt'}$. Таким образом, для того чтобы перейти к непрерывным переменным, необходимо определить операцию нахождения максимума трех величин. Обычно при этом используется выражение через ступенчатые функции Хэвисайда. Используя представление $\theta(x) = \frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn} x)$, после несложных преобразований имеем нелинейность пропорциональную $\left|\partial h/\partial x\right|$. Таким образом, все дело в том, как мы определяем операцию нахождения максимума в (1). Как видно, в данном случае при этом не возникает особых проблем, так как у каждого выделенного сайта имеется только два близлежащих соседа. А что будет, если брать в качестве основной поверхности, в которую инкорпорируются новые частицы, фрактальную или самоподобную поверхность? В этом случае для модели сравнения по максимальному значению в уравнении (1) следует взять, даже для одномерного случая, дискретное уравнение, в котором у каждого выделенного сайта может существовать не обязательно целое число соседей. Используя представление $\max\{A, B, C\} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \ln\left(e^{\frac{A}{\varepsilon}} + e^{\frac{B}{\varepsilon}} + e^{\frac{C}{\varepsilon}}\right)$, можно проводить сравнение по максимуму в (1) не с двумя выделенными сайтами, а представить влияние окружения в виде среднего «поля», зависимость которого от усредненного микропрофиля поверхности принимает степенной вид $(\nabla h)^{2\delta}$ со степенью нелинейностью δ, зависящей от конкретной дискретной модели. В результате, для данной модели, разлагая логарифм, легко получить следующую разновидность уравнения КРЗ:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^{2\delta} + \eta . \qquad (2)$$

Конечно, при анализе уравнения (2) следует соблюдать осторожность, так как при изменении степени нелинейности одновременно меняется и симметрия уравнения, с которой связан тот факт, будет ли перенормироваться коэффициент нелинейной связи или нет, и будет ли существовать точное соотношение между скейлинговыми показателями. Так, уравнение (2) при $\delta = 1/2$ - линейное и следует ожидать, что оно имеет точное решение, или, по крайней мере, допускает непротиворечивое численное моделирование. Если же перейти к $\delta = 1$, имеются точные выражения для скейлинговых показателей при $d = 1$, т.е. для одномерной границы раздела. Следовательно, можно строить теорию возмущений по степени нелинейности, исходя из точного решения, и проверять результаты в сильно нелинейном случае для уравнения КПЗ.

Для начала рассмотрим масштабные свойства уравнения (2). Под действием преобразований $x \to bx$, $t \to b^z t$ уравнения (2) легко видеть, что нелинейность в этом случае масштабируется как $b^{\frac{2-d(2\delta-1)}{2}}$. Таким образом, появилась возможность варьировать критическую размерность изменением δ. Следовательно, можно, не привязываясь к определенной критической размерности d_c, вычислять интегралы в пространстве с произвольной размерностью, но с критической степенью нелинейности $\delta_c = (2+d)/2d$. Далее, из анализа масштабных свойств коэффициента нелинейности, в частности, следует, что при $\delta < \delta_c = (2+d)/2d$ нелинейность растет при переходе к более крупным масштабам, приводя к нетривиальной неподвижной точке ренормгруппового потока, в противоположность к случаю $\delta > \delta_c$, когда в гидродинамическом пределе переходим к тривиальному случаю отсутствия нелинейности, иными словами, к идеальному скейлингу. Конечно же, привлекательно использовать особенность при $\delta = 0,5$ для построения уравнений ренормгруппы с последовательным аналитическим продолжением к реальной степени нелинейности. Вблизи этой точки мы работаем в пространстве с бесконечной размерностью, в котором, исходя из опыта работы с точно решаемыми квантовыми моделями конденсированных сред, справедлива теория среднего поля; в результате есть надежда получить точное решение. Однако трудности применения теории возмущений для систем с произвольной нелинейностью нивелируют это преимущество. Поэтому следует рассмотреть более упрощенную модельную систему, на основе анализа которой мы могли бы судить о возможном влиянии такой нелинейности на динамику роста границы раздела.

Далее на основе теории возмущений, связанной с разложением по степени нелинейности (см. [4]) (для системы со степенной нелинейностью), вычисляется спектр флуктуации до второго порядка. В работе [5] получено выражение для спектра флуктуации $F(\Omega)$ (Фурье – образа автокорреляционной функции) до второго порядка по δ. При этом продемонстрирована возможность перестройки спектра, связанная с изменением знака нелинейного вклада в суммарный спектр, на примере одномерной системы с сильным затуханием. Перестройка спектра имеет место при фиксированных параметрах и изменении интенсивности внешнего шума. Отметим, что изменение знака нелинейного вклада в спектр флуктуаций системы приводит к изменению направления перекачки энергии за счет нелинейного взаимодействия. Подобная картина может наблюдаться и при введении пространственных измерений, при этом аналогичная перестройка спектра может играть роль механизма подкачки крупномасштабных структур шумом.

Что касается процессов, происходящих при росте шероховатых поверхностей, то приведенное изменение направления потока энергии и перестройка спектра флуктуаций имеет важное значение. Известно, например, что уравнение

Кардара-Паризи-Занга является, фактически, потенциальным уравнением Бюргерса с внешним случайным источником, которое играет важную роль в изучении турбулентности. В условиях развитой турбулентности происходит перекачка энергии по спектру от малых длин волн к большим, причем взаимодействуют возбуждения с близкими масштабами. При малых длинах волн происходит диссипация энергии за счет механизма связанного с вязкостью. Таким образом, если принять во внимание возможность изменения потока энергии в область малых волновых чисел, то не исключено возникновение крупномасштабных устойчивых структур. То же самое касается и шероховатых поверхностей. Возникновение же крупномасштабных структур можно связать с аномальной шероховатостью, наблюдаемой при росте тонких пленок органических полупроводников [6], молекулы которых имеют определенную пространственную ориентацию.

1. E. Medina, T. Hwa, M. Kardar and Yi-Cheng Zhang, Burgers equation with correlated noise: renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth, Phys. Rev. A **39**, 3053 (1989).
2. J. Krug, H. Spohn, Universality classes for deterministic surface growth, Phys. Rev. A **38**, 4271 (1988).
3. E. Katzav, M. Schwartz, What is the connection between ballistic deposition and the Kardar-Parisi-Zhang equation, Phys. Rev. E. **70**, 061608 (2004).
4. C. M. Bender, K.A. Milton, M. Moshe, S.S. Pinsky, and L. M. Simmons, Jr., Novel perturbative scheme in quantum field theory, Phys. Rev. D **37**, 1472 (1988).
5. С. С. Моисеев, С. И. Павлик, δ– разложение спектра флуктуаций нелинейной системы, подверженной действию шума, ЖЭТФ **100**, 559 (1991).
6. Е.Я. Швец, О.П. Головко, С.И. Павлик, Динамика роста тонких пленок на атомарно гладкой поверхности, Вестник ХНАДУ **33**, 60 (2006).